UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

GeoGebra como herramienta para la enseñanza de Razones Trigonométricas en grado Décimo en la IED Leonardo Posada Pedraza

NESTOR JAVIER MATTA GUALTERO

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Física

Bogotá, Colombia

2014

GeoGebra como herramienta para la enseñanza de Razones Trigonométricas en grado Décimo en la IED Leonardo Posada Pedraza

NESTOR JAVIER MATTA GUALTERO

Trabajo Final de Maestría para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Físico, M.Sc. Plinio del Carmen Teherán Sermeño

Línea de Investigación:
Enseñanza-Aprendizaje, Evaluación y Didáctica de las Ciencias Naturales

Grupo Lev SemionovichVígodsky

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Bogotá, Colombia

2014

A Dios, por ser el que guía mis actos y el que me da fortaleza y sabiduría para llevar a cabo mis propósitos a nivel profesional y personal.

A mi esposa Pilar por brindarme su apoyo incondicional durante este proceso de crecimiento profesional.

AGRACECIMIENTOS

Al Físico, M. Sc. Plinio de Carmen Teherán Sermeño, docente de la Universidad Nacional quien me orientó para llevar a cabo los propósitos de éste trabajo con la mayor disposición y paciencia, y también porque me compartió muchos de sus conocimientos en TICs.

A mis estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Distrital Leonardo Posada Pedraza promoción 2014, por su disposición para realizar las actividades requeridas para la ejecución de esta propuesta didáctica.

Resumen

En este trabajo se da a conocer la posibilidad que tienen los docentes de Matemáticas de apoyar sus clases con software de geometría dinámica como GeoGebra, el cuál es considerado de gran utilidad para la enseñanza de la Geometría, el Cálculo, el Álgebra y la Trigonometría. Usando el software como herramienta para la enseñanza de la Trigonometría, se planteó una propuesta didáctica que se puso en práctica con los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Distrital Leonardo Posada Pedraza de la localidad séptima, Bogotá Colombia. En la propuesta se diseñaron 5 applets que involucraban las temáticas, razones trigonométricas de un ángulo agudo, razones trigonométricas de ángulos cuadrantales, reducción de ángulos al primer cuadrante, signos de las razones trigonométricas y gráficas de las funciones trigonométricas. Junto a los applets se agregaron formularios de Google Docs con preguntas enfocadas a la comprensión de los temas planteados, estos formularios y los applets se alojaron en un blog que se diseñó para la propuesta. El trabajo contiene un análisis cualitativo descriptivo de las respuestas de los formularios y de una encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes para determinar el impacto que tuvo la propuesta didáctica.

Palabras clave: Applets, GeoGebra, Razones Trigonométricas, Google Docs, Blog

Abstract

This work explores the opportunity that mathematics teachers have to supplement their classes with dynamic geometry software like *GeoGebra*, a useful teaching tool for the subjects of geometry, calculus, algebra and trigonometry. A proposal of using the software as a tool for teaching trigonometry was implemented with tenth grade students of Leonardo Posada Pedraza District School in Bogotá Colombia. Five Applets were designed involving the following subjects: trigonometric ratios of an acute angle; trigonometric ratios of quadrantal angles; reducing angles to the first quadrant, signs of the trigonometric ratios; and trigonometric graphing functions. Together with the Applets, forms were used from *Google Docs* with questions focused on understanding the issues raised. Both the forms and Applets were stored in a blog that was designed specifically for the proposal. The work contains a descriptive and qualitative analysis of the responses of the forms and a survey for the students to determine the impact of the teaching proposal.

Keywords: Applets, *GeoGebra*, Trigonometric Ratios, *Google Docs*, Blog

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

Pág.

1. REVISIÓN HISTÓRICA Y EPISTEMOLÓGICA

Desde la epistemología se realiza un acercamiento a la evolución e historia del conocimiento, en el caso particular de la razón trigonométrica, realizar este análisis histórico permite identificar las condiciones y problemáticas que determinaron el surgimiento de este concepto. Según Cantoral (2001), el análisis epistemológico de un concepto matemático, permite reconocer las explicaciones sobre la construcción del concepto formando una primera base de significaciones, buscando incidir en el discurso matemático escolar de los docentes.

Históricamente la Trigonometría fue enriquecida por numerosos aportes realizados en distintas culturas, por esta razón se presenta de manera sintética los aportes más significativos realizados a la Trigonometría, desde un punto de vista cronológico.

Según Montiel (2005), la historia de la Trigonometría se divide en dos momentos, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos.

A nivel práctico la evolución que ha tenido la Trigonometría ha dependido de las preguntas que el hombre se ha formulado para resolver problemas de fenómenos de diversa naturaleza en contextos astronómicos y físicos, relacionados con el movimiento, el calor, el sonido, etc.; respecto a su origen, cabe señalar que las dos acciones o actividades que fueron la esencia de ella son la medición y la Astronomía.

Las culturas que sentaron las bases de lo que hoy se conoce como Trigonometría fueron la babilónica, la egipcia, y la griega. En la actualidad los datos encontrados respecto a todos los posibles aportes que se dieron son algo limitados y por otra parte no hay buena precisión en cuanto a fechas.

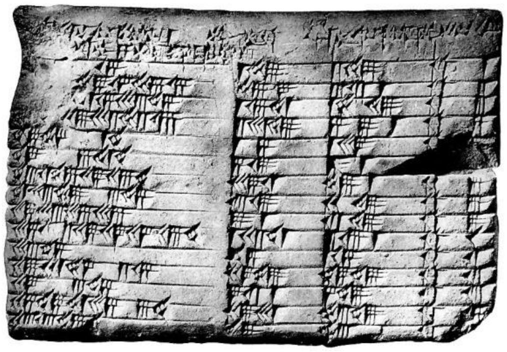
1.1 Aportes de los Babilonios

Los babilonios originaron el concepto de ángulo, caracterizado inicialmente por la escritura cuneiforme[1] y el principio de notación posicional de base 60. La cultura babilónica tuvo gran influencia con su sistema de medida, muestra de ello es que en la actualidad usamos el grado sexagesimal a pesar que es el radián la unidad principal del sistema internacional de unidades, es importante señalar que en los cursos de Trigonometría en las escuelas es una necesidad abordar las conversiones entre las dos unidades de medida, “grado sexagesimal y el radián”.

Los babilonios desde la agricultura ya usaban medidas de lados de triángulos y razones entre ellos. Hay evidencias como la tablilla Plimpton 322 (Ver figura 1.1), la cual data entre los años 1600 y 1900 a.C.; esta tablilla muestra que los babilonios conocían las ternas pitagóricas mucho antes que el mismo Pitágoras.

[1] La escritura cunieforme se conoce como una de las formas más antiguas de expresión escrita, esta forma de escritura cuneiforme se escribió originalmente sobre tablillas de arcilla húmeda, mediante un tallo vegetal biselado en forma de cuña, de ahí su nombre.

Figura 1.1: Tablilla Plimpton[2]



Hubo unos primeros aportes a la Astronomía durante el periodo asirio hacia el año 700 a.C. Según Kline (1992), fue en este periodo en el que se empezaron a registrar datos a partir de observaciones, con los que lograron predecir la posición diaria de los planetas teniendo como base de cálculo los eclipses; sin embargo, cabe mencionar que dentro de lo realizado por los babilonios hasta ese momento no había ningún tipo de esquema geométrico de los movimientos lunar o planetarios; los babilonios a partir de sus observaciones astronómicas realizaron el calendario, el cual era determinado por las posiciones del sol, la luna y las estrellas; a partir de él establecían los intervalos de tiempo propicios para la siembra.

La división del círculo en 360 grados tuvo su origen en la astronomía babilónica, y el hecho de usar su sistema de base 60 fue referente para dividir el grado y el minuto en 60 partes cada uno. La influencia de este sistema en la medición tanto del tiempo como de la amplitud angular, constituyen uno de los más grandes aportes de la cultura babilónica al desarrollo de la matemática.

1.2 Aportes de los Egipcios

En fechas similares a las babilonias y de forma independiente, los egipcios también abordan la medición de ángulos, de hecho se afirma que fueron ellos quienes realmente implementaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. El referente principal que es fuente de información de la matemática egipcia es el papiro de Ahmes, también llamado papiro Rhind (1700 a.C., aproximadamente), en el que se plantean algunos cimientos de la Trigonometría respecto a cálculos necesarios para la construcción de pirámides y monumentos, así como también, algunas reglas para el cálculo de áreas de formas cuadradas, triangulares y circulares. En la construcción de las pirámides hubo serías dificultades, como por ejemplo, mantener la pendiente constante en cada cara (en el proceso de construcción) y la misma en las cuatro caras; sin embargo, las relaciones en forma de cocientes entre la separación de la recta oblicua del eje

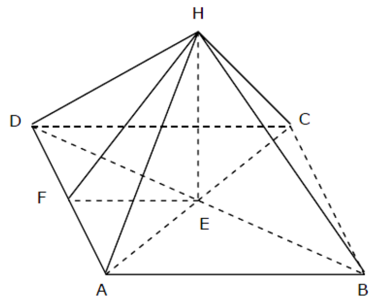
[2] Imagen tomada de: http://www.cienciaxxi.com/2009/02/ternas-pitagoricas-ii-plimpton-322.html

vertical por unidad de variación en la altura, permitieron solucionar esta dificultad.

Montiel (2005), describe en su trabajo cómo se realizaba este proceso de cálculo al que los egipcios llamaban Se-qet con el cual lograban mantener las proporciones de la pirámide y la inclinación de sus caras, este procedimiento se planteaba a partir de la siguiente forma:

…supongamos la pirámide constituida por el cuadrado de su base ABCD (Ver figura 1.2), E su centro, H el vértice y F el punto medio de la lado AD de la base

Figura 1.2: Pirámide de base cuadrada



El $se - qet = \frac{EF}{EH}$, de esta relación emergió el concepto de la cotangente de un ángulo y puso de manifiesto las razones en términos de proporciones.

Los egipcios tuvieron la necesidad de establecer también un calendario para sus oficios de agricultura y definieron el intervalo de tiempo para el año solar a partir de la aparición de la estrella Sirio, esto porque la estrella se hacía visible un día del verano exactamente antes de la salida del sol, y este día comenzaban a subir los niveles de las aguas del rio Nilo, por lo cual definieron este día como el primer día del año y de esta forma podían predecir las inundaciones.

1.3 Aportes de los Griegos

A pesar de que suele afirmarse que la trigonometría surgió en Grecia con Thales, Pitágoras y los físicos – filósofos del siglo V a.C. en Turano (2005), las investigaciones modernas dicen que no fueron los griegos quienes inventaron las primeras nociones de geometría, trigonometría y astronomía, sino los babilonios y los egipcios cerca del año 3000 a.C. Es importante señalar que estas culturas abordaron las matemáticas desde un carácter puramente práctico, no hay mucho simbolismo ni ninguna formulación metodológica general o de demostración.

Se puede afirmar que hubo una transición de conocimientos entre las culturas babilonia y egipcia con la griega, esta influencia se dio también gracias a la ubicación geográfica y además porque existen referencias de la cultura griega a los conocimientos de la cultura egipcia, en particular, los griegos consideraron a los egipcios como los fundadores de la agrimensura, la astronomía y la aritmética.

Desde la cultura griega se dio un paso de lo empírico a lo teórico, en donde la Geometría como ciencia adquiere un carácter deductivo. Para los siglos V y IV a.C. ya los babilonios habían acumulado una serie de datos astronómicos que iban a permitir a los griegos construir la trigonometría gradualmente.

El aporte de los griegos fue un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales (o sus arcos correspondientes) en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los subtienden. Los astrónomos de la época Alejandrina ya habían empezado a trabajar en problemas que apuntaban de una manera cada vez más urgente a la necesidad de establecer sistemáticamente relaciones entre los ángulos y las cuerdas. Según Kline (1992), estas relaciones les permitieron calcular y ante todo predecir, a través de las proporciones y la recurrencia periódica de los fenómenos naturales en el universo, el tamaño de la Tierra y las distancias relativas al Sol y a la Luna, a pensadores como: Eudoxo de Cnido (370 a.C.), Aristarco de Samos (280 a.C.), Eratóstenes de Cirene (240 a.C.), Hiparco de Nicea (140 a.C.), Menelao de Alejandría (70 d.C.) y a Ptolomeo de Alejandría (150 d.C.), cada uno realizó aportes de manera significativa, se puede decir que los griegos realizaron la matematización de la Astronomía.

Thales de Mileto, quien al parecer aprendió mucho de la matemática egipcia, fue quien introdujo la geometría a Grecia y desarrolla la teoría de la semejanza, Thales formula que “los lados correspondientes a ángulos iguales en triángulos semejantes son proporcionales”; la utilidad de su teoría se hizo manifiesta cuando logró calcular la altura de una de las pirámides de Egipto comparando su sombra con la de una vara vertical.

Eudoxo de Cnido comenzó a introducir las matemáticas de manera sistemática en la astronomía, él dio una nueva definición de la igualdad entre dos razones, por lo que según Boyer (1999), se le atribuye el descubrimiento de la teoría de las proporciones que se desarrolla en los libros V y VI de los Elementos de Euclides. La definición de proporción de Eudoxo como igualdad entre dos razones, es equivalente al procedimiento de los productos de los medios y los extremos en una proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } a \cdot d = b \cdot c$$

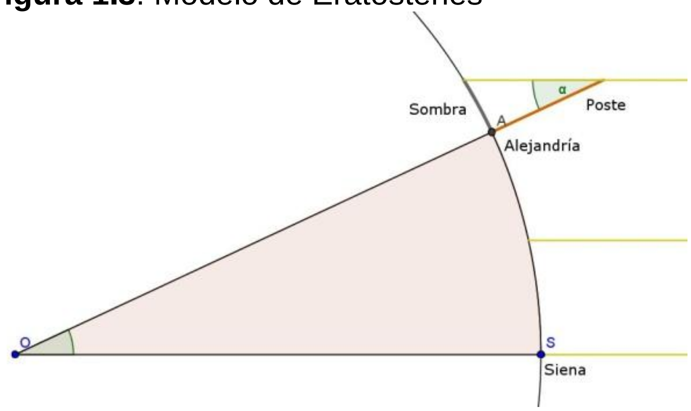
Por otra parte, Eudoxo fue el primero que intento explicar los movimientos planetarios de una forma matemática, a cada planeta le correspondía un número de esferas, para un sistema total de 34 esferas.

Aristarco de Samos, admite la esfericidad de la Tierra y postuló por primera vez una hipótesis heliocéntrica para el sistema planetario, propuso mostrar que la Tierra no era el centro del sistema, que en su lugar se ubicaba el Sol y la Tierra giraba a su alrededor en una órbita circular; por esto fue llevado a juicio hacia el año 270 a.C. Él intentaba explicar las proporciones geométricas del universo para lo cual usó la relación entre cuerda y arco en un mismo círculo aplicándola a sus cálculos de las distancias del Sol y la Luna, manifestando una estrecha relación entre las observaciones astronómicas y los métodos matemáticos, por lo que se le considera el precursor de la Trigonometría.

Eratóstenes de Cirene también aportó a la Trigonometría, se propuso determinar el tamaño de la Tierra y así refutar las objeciones que se habían hecho respecto a que era esférica. El procedimiento realizado por Eratóstenes consistió en determinar la sombra proyectada por el sol en dos objetos a la misma hora en ciudades distintas, Siena y Alejandría, encontrando que en Alejandría si se proyectaba sombra de tal forma que los rayos del Sol sí incidían en cierto ángulo, cuando en Siena, el sol no proyectaba sombra alguna, lo que no era coherente con la hipótesis de que la Tierra era plana.

Eratóstenes comprobó que el ángulo media aproximadamente 7,5° (Ver Figura 1.3) y teniendo en cuenta que la aproximación de la distancia entre las dos distancias era de 5250 estadios (equivalente a 157,5 m), concluyó que el ángulo α (7.5°) es la cuadragésima octava parte del círculo completo (360°), por lo tanto, la distancia entre Alejandría y Siena (5250 estadios) debe estar en la misma proporción a la circunferencia total de la tierra, es decir, ésta debe ser 48 veces 5.250 estadios, o 252.000 estadios. Esto coincide, dentro de un 5%, con el valor aceptado en la actualidad para la circunferencia de la Tierra.

Figura 1.3: Modelo de Eratóstenes

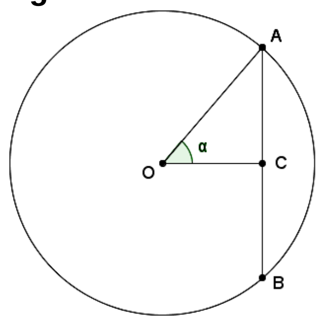


El aporte de Eratóstenes en cuanto a la medición de las dimensiones de la Tierra es de especial atención, dada la aplicación de los conceptos de ángulo, razón, tasa y proporción en el sentido de la utilidad para resolver problemas de tipo astronómico, enfatizando de nuevo en la relación Trigonometría – Astronomía.

Dentro del grupo de pensadores antes mencionados, Hiparco de Nicea fue quién elaboró la primera tabla trigonométrica según Boyer (1999), con lo que se ganó el derecho de ser reconocido como el padre de la Trigonometría ante los matemáticos y por los griegos como el padre de la Astronomía. Cabe anotar que las observaciones que tenía eran insuficientes para explicar el movimiento de los planetas con exactitud. No es mucho lo que se conoce de Hiparco, la mayor parte de lo que se conoce proviene de Ptolomeo, que atribuye a Hiparco muchas ideas de Trigonometría y Astronomía. Se le debe a él varias observaciones astronómicas y descubrimientos, Kline(1992).

Para Hiparco en su trabajo sobre cuerdas, el número de unidades de la cuerda correspondiente a un número de grados equivale a la función seno moderna. Si 2α es el ángulo central de arco AB, (ver figura 1.4), Hiparco da el número de unidades de la cuerda en $2 \cdot AC$ cuando el radio OA tiene 60 unidades, análogamente se encuentra inmerso en el análisis hecho por Hiparco lo que para nosotros es el seno en términos de los lados del triángulo rectángulo, $sen\alpha = AC/OA$

Figura 1.4: Cuerda AB de Hiparco



Hiparco planteo la división sistemática del círculo en 360 unidades y la división del diámetro del círculo en 120 partes, de tal forma que el radio midiera 60 unidades. El método de Hiparco constituye un gran aporte para el desarrollo de conceptos de ángulo, cuerda y razón en el sentido trigonométrico.

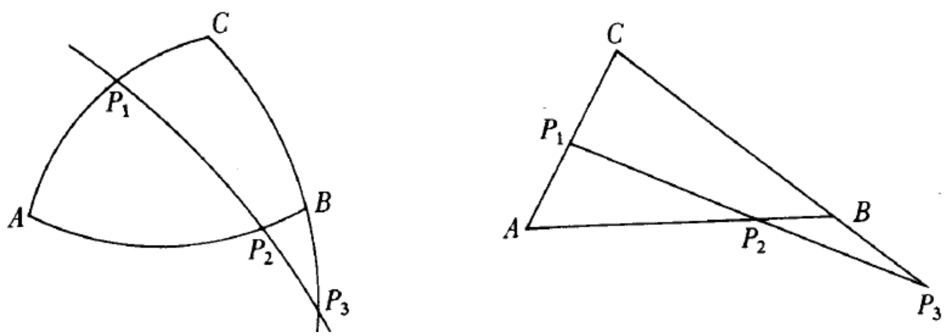
Menelao (alrededor del siglo 98 d.C) hizo que la trigonometría griega llegara a un alto nivel con su obra principal llamada Sphaerica, aunque también se cree que escribió otros seis libros sobre cuerdas en un círculo y un tratado sobre arcos del zodiaco.
Dicha obra consta de 3 libros, en el primero se aborda la trigonometría esférica en donde se define el triángulo esférico como la figura formada por tres arcos de círculos máximos sobre una esfera, cada uno de ellos menor que una semicircunferencia. Menelao en dicha obra probó teoremas para triángulos esféricos, análogos a los probados por Euclides para los triángulos planos. Según Kline (1992), para el planteamiento del teorema se usa la versión moderna de la noción seno, pero para Menelao el seno de un arco como AB (o el seno del ángulo central correspondiente en el centro de la esfera) se sustituye por la cuerda del arco doble AB. En términos de lo que es el seno en la actualidad, el teorema de Menelao afirma que:

$$sen\ P_1A * senP_2B * senP_3C = sen\ P_1C * senP_2A * senP_3B$$

La demostración de este teorema se apoya sobre el teorema correspondiente para triángulos planos, al cual se le denomina también teorema de Menelao y establece que:

$$P_1A * P_2B * P_3C = P_1C * P_2A * P_3B$$

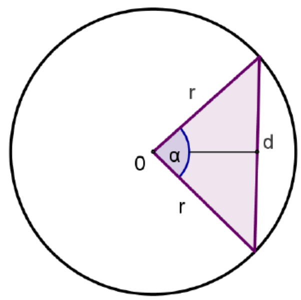
Figura 1.5: Teorema de Menelao



Aunque Menelao realizó aportes considerables a la Trigonometría, hubo otro trabajo más influyente realizado por Claudio Ptolomeo llamado El Almagesto, el cual se consolida como la recopilación de los principios matemáticos hasta su época, porque continúa y completa los trabajos de Hiparco y Menelao en Trigonometría y Astronomía. Son realmente considerables los aportes de Ptolomeo a la luz de la función trigonométrica, Ptolomeo construye una tabla de cuerdas para todos los ángulos entre 0° y 180°, calculada de ½ grado en ½ grado.
Fundamentalmente se trata de una tabla de senos: si r denota el radio, α el ángulo central y la longitud de la cuerda se denota por d, tenemos:

$$d = 2r\, sen\frac{\alpha}{2}$$

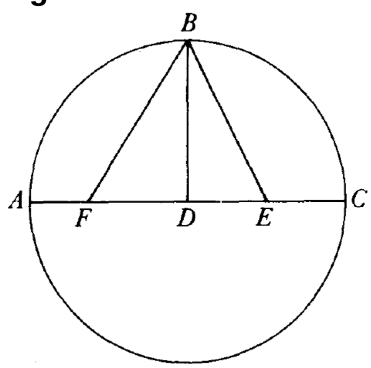
Figura 1.6: Cuerda de Ptolomeo



El análisis de Ptolomeo comienza con los cálculos de las cuerdas de arcos de $36°$ y $72°$. ADC es el diámetro de una circunferencia (ver figura 1.7), con centro en D y BD es perpendicular a ADC. E es el punto medio de DC y F se elige de tal manera que $EF = BE$. Ptolomeo demuestra que FD coincide con el lado del decágono regular inscrito y BF con el lado del pentágono regular inscrito. Como Ptolomeo continúa con los trabajos de Hiparco, también define el diámetro de la circunferencia en 120 unidades y por tanto un radio de 60 unidades, pero cada una de estas unidades también se subdivide en 60 y cada una de ellas en otras 60, de manera que a la magnitud distancia le da el mismo tratamiento de la amplitud angular en términos de las unidades de medida. Por el teorema de Pitágoras se halla EB, planteando lo siguiente $EB^2 = ED^2 + BD^2$, $EB^2 = 4500$, de tal manera que $EB = 67\ 4'\ 55''$, lo que sería en sistema decimal $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600} = 67{,}0819$. Ahora, $EF = EB$ por lo que se tiene entonces la medida de EF. Entonces se puede calcular $FD = EF - DE$, de lo que se obtiene que $FD = 37\ 4'\ 55''$, esto es, la medida del lado del decágono regular, es decir, la medida de una cuerda de un arco de $36°$.

Luego en el triángulo rectángulo FDB, se puede calcular la medida de BF usando la medida de FD y aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras, de tal forma que $BF = 70\ 32'\ 3''$. Como BF es el lado del pentágono regular, entonces se tiene la medida de la cuerda del arco de $72°$, Kline (1992).

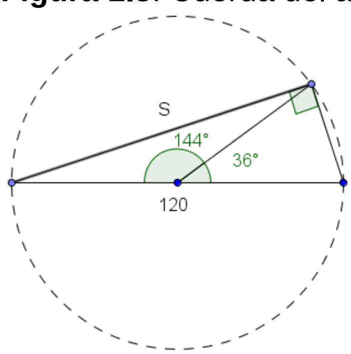
Figura 1.7: Cuerda de 36° y 72° de Ptolomeo[3]



Para el caso del hexágono regular, se tiene que la medida del lado coincide con la medida del radio, por tanto la cuerda de un arco de $60°$ es de 60 unidades. Realizando un procedimiento similar, Ptolomeo halla la cuerda correspondiente a un ángulo de 90° y de 120°. Adicionalmente halla la medida de la cuerda del ángulo suplementario, para el caso del ángulo suplementario de 36° (ver figura 1.8), es decir, 144°, encontrando la siguiente relación:

$$[cuerda\ S]^2 + [cuerda(180 - S)]^2 = 120^2$$

Figura 1.8: Cuerda del ángulo suplementario



Esto porque las cuerdas de S y su ángulo suplementario son realmente catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el diámetro de la circunferencia, pues todo triángulo formado sobre el diámetro de un círculo siempre es un triángulo rectángulo.

Reemplazando por 144

$$[cuerda\ 144]^2 + [cuerda(180 - 144)]^2 = 120^2$$

Y despejando se obtiene que la medida de la cuerda de un arco de 144° es $114\ 7'\ 37''$.

La relación planteada es realmente equivalente a la identidad actual $sen^2 A + cos^2 A = 1$. Dado que ya se tenía que $cuerda\ \alpha = 2r\ sen\frac{\alpha}{2}$, por tanto $cuerda\ S = 120\ sen\frac{S}{2}$ y a partir de ésta relación $(cuerda\ S)^2 = 120^2\ sen^2\frac{S}{2}$

[3] Imagen tomada de: Kline, El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Tomo I. 1992. Pág 171

Luego se tiene que

$$120^2\ sen^2 \frac{S}{2} + 120^2\ sen^2 \frac{180 - S}{2} = 120^2$$

O bien

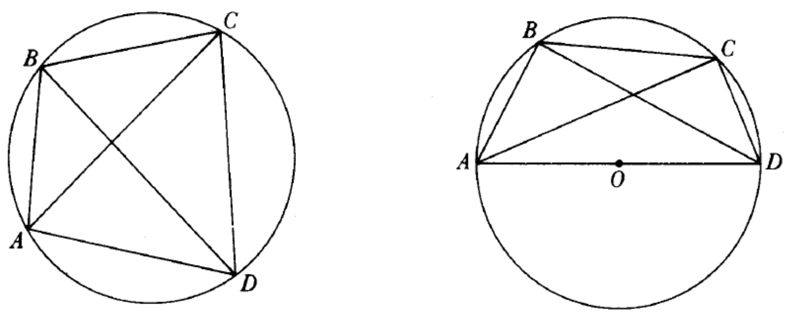
$$sen^2 \frac{S}{2} + \ sen^2 (90 - \frac{S}{2}) = 1$$

Es decir,

$$sen^2 \frac{S}{2} + \ cos^2 \frac{S}{2} = 1$$

A partir de los cálculos de cuerdas realizados por Ptolomeo, continúa su trabajo planteando lo que él llama un lema, pero que actualmente se conoce como el teorema de Ptolomeo, el cual plantea lo siguiente: "Dado cualquier cuadrilátero inscrito en un círculo en el que se trazan las dos diagonales, se cumple que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$"

Figura 1.9: Teorema de Ptolomeo[4]



Para la demostración, toma el cuadrilátero especial en el que AD es un diámetro. Suponiendo que se conoce AB y AC, Ptolomeo muestra luego como calcular BC. El segmento BD es la cuerda del arco suplementario de AB y CD es la cuerda del suplemento del arco AC. Al aplicar el teorema, cinco de las seis longitudes involucradas en él son conocidas, por lo que la sexta, que en este caso es BC se puede calcular así: $arco\ BC\ =\ arco\ AC - arco\ AB$, de tal forma que se establece como calcular la cuerda de la diferencia de dos arcos, cuando se conoce la cuerda de cada uno de ellos, también se realiza un proceso similar para hallar la cuerda de la mitad un arco y la cuerda de la suma de dos arcos, que vendrían a ser lo que se conoce actualmente como las identidades trigonométricas de la diferencia y de la suma de dos ángulos y la del ángulo medio.

El Almagesto pone a la Trigonometría de una forma definitiva que perduraría por muchísimos años. Aunque Ptolomeo profundiza más en los triángulos esféricos,

[4] Imagen tomada de: Kline, El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Tomo I. 1992. Pág 172

por haber calculado las cuerdas de arcos puso realmente las bases de la trigonometría plana.

1.4 Aportes de los Hindúes y los Árabes

Con la caída del imperio romano, el centro de la investigación matemática se desplazó a la India y a Mesopotamia. Los avances de los hindúes tuvieron menos reconocimiento que los mencionados anteriormente. Ptolomeo había usado cuerdas de arcos calculados sobre la base de que el diámetro de un círculo estaba dividido en 120 unidades. Varahamihira, matemático y astrólogo hindú, utilizó 120 unidades para el radio, de tal forma que la tabla de cuerdas de Ptolomeo se convirtió en una tabla de semicuerdas, pero todavía asociadas a todo el arco. Aryabhata otro gran matemático y astrónomo hindú, realizó dos cambios respecto a las tablas, primero asoció la semicuerda con la mitad del arco de la cuerda completa y este concepto hindú de seno fue usado por todos los matemáticos posteriores. Y en segundo lugar, introdujo un radio de 3438 unidades, este número fue obtenido asignando $360 * 60$ unidades (número de minutos) a la circunferencia de un círculo y usando la formula $C = 2\pi r$ con valor aproximado para π de 3,14. De esta manera, en el esquema de Aryabhata, el seno de un arco de 30°, es decir, la longitud de la semicuerda correspondiente a un ángulo de 30°, era 1719. Aunque usaron el equivalente a nuestro coseno, daban uso con más frecuencia al seno del arco complementario.

La trigonometría árabe indudablemente tuvo como referente los aportes de la grecia clásica. Con el tiempo fueron accesibles en lengua árabe los trabajos de algunos pensadores griegos importantes, de tal forma que los árabes mejoraron las traducciones y realizaron comentarios significativos.

Uno de los aportes más singulares de los árabes fue el de tomar el radio 1, $r = 1$, en la circunferencia goniométrica o unitaria, a diferencia de los griegos que usaban radios de 60 unidades $r = 60$, lo cual fue dando lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas. De otra parte, usaron la identidad $sen^2 A + cos^2 A = 1$, para calcular valores de algún coseno a partir de los valores del seno.

En la trigonometría árabe se sistematizó el uso del seno del ángulo en lugar de la correspondiente cuerda helénica e introdujeron las funciones trigonométricas restantes. Otro pensador árabe fue Abul Wefa, quien escribe una versión mejorada y ampliada del Almagesto. Él hace cálculos a partir de fórmulas de Ptolomeo y sus propios aportes, hallando el valor de seno de 30° con 9 decimales exactos, generando así una tabla de senos que va de 15´ en 15´ e independientemente construye también una tabla de tangentes y secantes.

1.5 Nace la Trigonometría

Las culturas anteriores acumularon datos suficientes acerca de los fenómenos ligados a los movimientos de los cuerpos celestes, para satisfacer necesidades prácticas como el comercio, la agricultura y la navegación.

Tiempo después, cerca del año XII d.C, astrónomos como Copérnico y Kepler todavía usaban las tablas astronómicas de Ptolomeo planteadas en su obra El Almagesto y además se continuaba expresando la relación entre arcos, cuerdas y diámetros de círculos.

Ya en el Renacimiento cerca al siglo XVI, Regiomontano uno de los matemáticos más grandes de la época quien realmente tenía el nombre de Johann Müller, escribe de manera independiente una trigonometría plana y esférica marcando el verdadero renacimiento de la Trigonometría, que hasta ese momento solo tenía reglas, teoremas y tablas auxiliares usadas para observaciones astronómicas. Müller en su obra más importante *De Triangulis Omnimodis*, señala algunos conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, sobre triángulos rectángulos y sobre trigonometría esférica.

Posteriormente George Rethicus, colaborador de Copérnico, es quien descarta el tratamiento tradicional de la Trigonometría respecto de un arco de circunferencia y se centró en los lados de un triángulo rectángulo, de manera que introdujo el concepto moderno de las funciones trigonométricas de ángulos en vez de funciones de arco, planteándolas como proporciones respecto a los lados del triángulo rectángulo.

En el siglo XVII se produce un gran avance en los cálculos trigonométricos gracias al matemático Jhon Napier, quien fue el inventor de los logaritmos. Años después Isaac Newton inventa el cálculo diferencial e integral y logra representar funciones matemáticas usando series infinitas de potencias, y de hecho, él encuentra la serie para el seno y series similares para el coseno y la tangente.

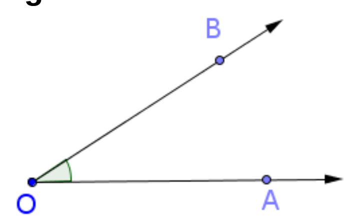
2. REVISIÓN CONCEPTUAL

Para llevar a cabo la presente propuesta es necesario considerar aspectos disciplinares de la trigonometría y en particular de las razones trigonométricas

2.1 El concepto de Ángulo

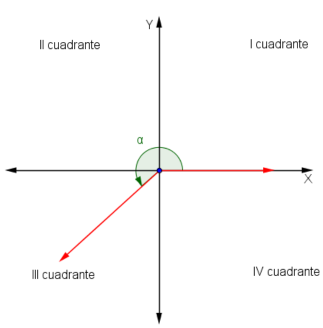
Un ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o vértice. Ésta región es llamada amplitud y suele medirse en función de alguna de las siguientes unidades de medida: el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal. Para generar un ángulo se puede considerar una semirrecta de origen O y que pasa por un punto A, la cual se puede denotar $\overrightarrow{OA}$. A partir de B un punto en el mismo plano fuera de la semirrecta se hace girar la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ con centro de rotación en O, (Ver Figura 2.1) y hasta el punto B, hasta obtener la semirrecta $\overrightarrow{OB}$. Se logra de ésta forma obtener un ángulo con lado inicial $\overrightarrow{OA}$ y lado terminal $\overrightarrow{OB}$, $\measuredangle AOB$

Figura 2.1: Definición de ángulo



En la propuesta didáctica se emplean los ángulos en su posición estándar, también llamados ángulos en posición normal, estos ángulos tiene su origen en un sistema de coordenadas cartesianas, el lado inicial coincide con el semieje positivo X y el lado final está contenido en uno de los cuatro cuadrantes determinados por el sistema cartesiano, o está sobre uno de los ejes (Ver figura 2.2). El cuadrante al que pertenece el ángulo es donde se encuentre el lado terminal o final.

Figura 2.2: Ángulo en posición normal



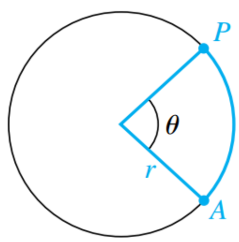
2.1.1 Sistema Sexagesimal

Un ángulo formado por la rotación, en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde el lado inicial hasta que coincida con el mismo (1 vuelta o revolución), se dice que mide 360 grados, abreviado 360°. Así Un grado, 1°, es $\frac{1}{360°}$ de vuelta. Un ángulo recto es un ángulo de 90°, o $\frac{1}{4}$ de vuelta, un ángulo llano es un ángulo de $180°$, ó $\frac{1}{2}$ vuelta. En el sistema sexagesimal 1° se divide en 60 ángulos de igual medida denominados minutos $1° = 60´$, y Un minuto, abreviado 1´, se divide en 60 ángulos de igual medida denominados segundos $1´ = 60”$.

2.1.2 Sistema Circular o Cíclico

En este sistema de medida angular la unidad de medida básica es el radián. Para definir un ángulo de medida 1 en radianes, consideremos un círculo de cualquier radio r. El ángulo central de un círculo es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si θ, es el ángulo central que se ve en la figura 2.3, decimos que el arco AP (denotado $\widehat{AP}$) del círculo subtiende a θ o que θ esta subtendido por $\widehat{AP}$. Si la longitud de $\widehat{AP}$, es igual al radio del círculo, entonces θ tiene una medida de un radián. Por tanto, *un radián es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo*.

Figura 2.3: Definición de radián



2.1.3 Relación entre grados y radianes

Considérese un círculo de radio r. Un ángulo central de una vuelta subtenderá un arco S igual a la circunferencia del círculo (ver figura 2.4), ya que la circunferencia de un círculo es igual a $2\pi r$, se plantea

$$S = 2\pi r$$

$$S = r\theta$$

$$2\pi r = r\theta$$

$$\theta = 2\pi \ \ radianes$$

Así,

$$1 \ \acute{a}ngulo \ giro \ puede \ ser \ expresado \ como \ 2\pi \ \ radianes$$

De modo que,

$$360° \ es \ equivalente \ a \ 2\pi \ \ radianes$$

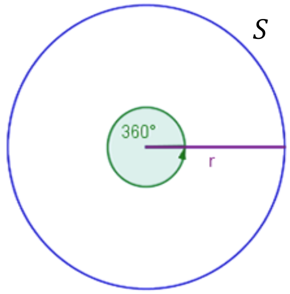
ó

$$180° \; es \; equivalente \; a \; \pi \;\; radianes$$

Se puede afirmar entonces que un radián es equivalente a la razón:

$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 57{,}29°$ aproximadamente

Figura 2.4: Relación entre grados y radianes



Generalmente la razón de conversión que se usa para pasar grados a radianes es $\frac{\pi}{180°}$, y para pasar radianes a grados $\frac{180°}{\pi}$

A partir de la relación entre grados y radianes se pueden establecer las siguientes equivalencias:

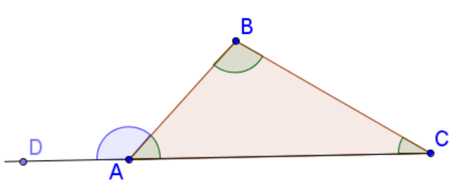
Tabla 2.1: Equivalencia entre grados y radianes

Radianes	Grados
π	180
0	0
$\frac{\pi}{6}$	30
$\frac{\pi}{4}$	45
$\frac{\pi}{3}$	60
$\frac{\pi}{2}$	90
$\frac{3\pi}{2}$	270
2π	360

2.2 Concepto de Triángulo

Si $A, B \; y \; C$ son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC} \; y \; \overline{CA}$, se llama triángulo y se simboliza ΔABC.

Figura 2.5: Definición de triángulo

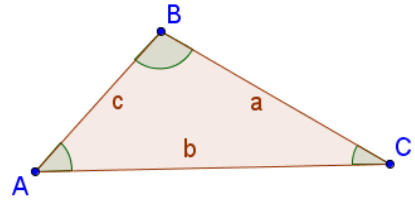


Los puntos $A, B\ y\ C$ se llaman vértices y los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}\ y\ \overline{CA}$, se llaman lados. Los ángulos $\angle ABC, \angle BCA\ y\ \angle CAB$, se denominan ángulos interiores del triángulo. Un ángulo exterior es un ángulo formado por uno de sus lados y la prolongación de otro de sus lados, el ángulo $\angle DAB$ es exterior al ΔABC.

Los triángulos tienen dos propiedades de especial atención:

Propiedad 1: "En todo triángulo, la suma de las longitudes de cualquier par de lados es mayor que la longitud del tercer lado". A esta propiedad se le conoce como desigualdad triangular.

Figura 2.6: Propiedad de la desigualdad triangular



$a + b > c;\quad b + c\ > a;\quad a + c > b$

Propiedad 2: "En todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos internos es de 180°"

$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 180°$$

2.3 Concepto de Semejanza

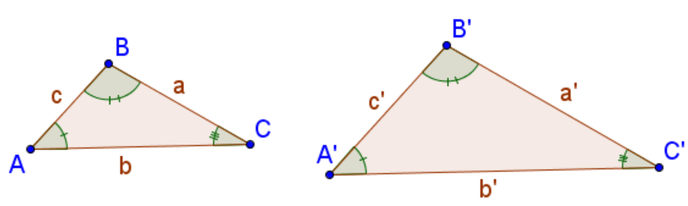
Según Moise (1986), dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

Definición:

Se dice que dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, son semejantes, lo cual se escribe $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$, si hay una correspondencia entre los lados y ángulos tal que:

1. $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'\ y\ \measuredangle C = \measuredangle C'$
2. $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

Figura 2.7: Definición de semejanza



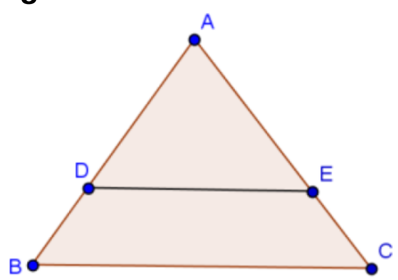
En palabras, sea dada una correspondencia entre triángulos, si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza y decimos que los triángulos son semejantes. Particularmente en los triángulos, si se cumple una de las dos condiciones, también se cumple la otra.

2.3.1 Teorema fundamental de la proporcionalidad

Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca en puntos distintos a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales en dichos lados.

De otra forma, dado un triángulo ΔABC sean D y E puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tales que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

Figura 2.8: Teorema fundamental de la proporcionalidad



2.3.2 Teorema de Thales

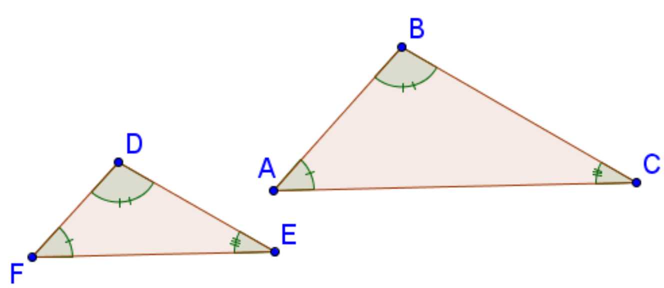
Si tres o más paralelas son cortadas por dos o más secantes, la razón de las longitudes de los segmentos determinados en una de las paralelas, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos correspondientes determinados por las otras paralelas

Para determinar si dos triángulos son semejantes, basta con analizar algunos de sus elementos, lo cual lleva a los denominados criterios de semejanza de triángulos.

Criterio AAA

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza. De otro modo, sea dada una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ entre dos triángulos. Si $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle F$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Figura 2.9: Criterio AAA

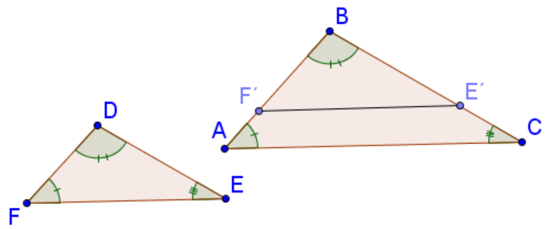


Criterio LAL

Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

De otro modo, se dan los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta DEF$ y la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$. Si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Figura 2.10: Criterio LAL

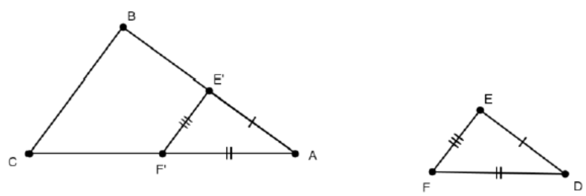


Criterio LLL

Se da una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza.

De otro modo; se dan los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta DEF$ y la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$. Si $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Figura 2.11: Criterio LLL



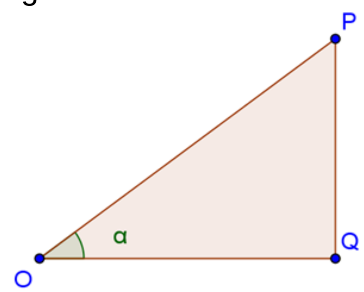
De la proporcionalidad entre segmentos se puede ver una relación de semejanza entre triángulos como se planteó anteriormente, de tal manera que esto implica que la razón entre la medida de la magnitud de dos de ellos en un mismo triángulo se mantiene constante en el otro, siendo esta la base de la construcción de las razones trigonométricas.

2.4 El Triangulo Rectángulo

Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos es recto.

En un triángulo rectángulo (Ver figura 2.12), el lado opuesto al ángulo recto Q, se denomina hipotenusa y los otros dos lados se llaman catetos, el triángulo ΔOPQ es rectángulo por tener ángulo recto en Q y los ángulos agudos $\measuredangle O$ y $\measuredangle P$ son complementarios, es decir, $\measuredangle O + \measuredangle P = 90°$. Los catetos del triángulo rectángulo son opuestos o adyacentes dependiendo del ángulo agudo al cual se esté haciendo referencia, en éste caso $\overline{PQ}$ es el cateto opuesto al ángulo α y $\overline{OQ}$ es el cateto adyacente al ángulo α.

Figura 2.12: Triángulo rectángulo definición



2.5 El Teorema de Pitágoras

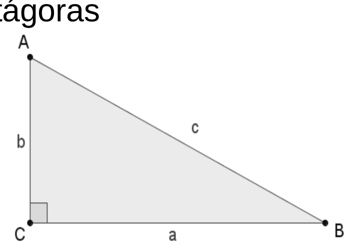
Uno de los teoremas más útiles en geometría plana es el teorema de Pitágoras, llamado así por el matemático griego Pitágoras.

El teorema plantea que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo.

De otro modo, dado el triangulo rectángulo ΔACB con longitud de hipotenusa c y con longitudes de catetos a y b.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

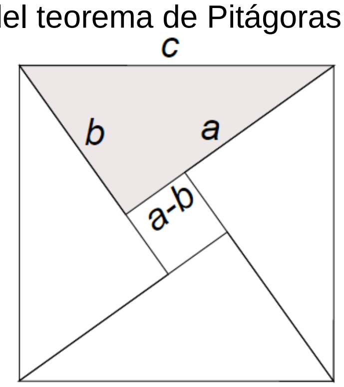
Figura 2.13: Teorema de Pitágoras



En la actualidad hay bastantes demostraciones del teorema de Pitágoras. Una de ellas es la realizada por el matemático hindú Bhaskara.

Con cuatro triángulos rectángulos de lados a, b y c se construye el cuadrado de lado c (Ver figura 2.14), en cuyo centro se forma otro cuadrado de lado (a-b).

Figura 2.14: Demostración del teorema de Pitágoras



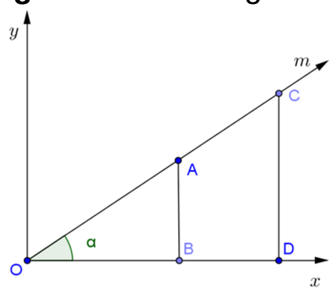
Puede encontrarse el área del cuadrado grande sumando las áreas de los cuatro triángulos y el área del cuadrado pequeño. El área de cada uno de los cuatro triángulos es $\frac{1}{2}ab$, el área del cuadrado pequeño es $(a-b)^2$. De tal forma que, el área del cuadrado de lado c, se puede expresar:

$c^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + (a-b)^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2$, por tanto el teorema queda demostrado

2.6 Razones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo

Para iniciar el estudio de las razones trigonométricas consideremos los triángulos de la figura 2.15

Figura 2.15: Triángulos Rectángulos Semejantes



Obsérvese los triángulos ΔOAB y ΔOCD y el ángulo α que se encuentra en posición normal por coincidir su vértice con el origen de coordenadas y tener orientación positiva. En el lado terminal del ángulo α determinado por la recta m se ubicaron los puntos A y C y a partir de ellos se trazaron perpendiculares al eje x (abscisas), lo que permite determinar los triángulos ΔOAB y ΔOCD los cuales son rectángulos con ángulo recto en B y D respectivamente. Es de notar que los triángulos rectángulos mencionados son semejantes por el criterio de semejanza lado-ángulo-lado (LAL), dicho criterio establece que "*Si dos lados de un triángulo son proporcionales a los lados correspondientes de otro triángulo y los ángulos correspondientes entre estos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes*"

Es decir que $\Delta OAB \cong \Delta OCD$, lo que permite establecer proporciones entre sus lados correspondientes, así:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} \quad (1) \qquad \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} \quad (2)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} \quad (3) \qquad \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} \quad (4)$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} \quad (5) \qquad \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}} \quad (6)$$

En los dos triángulos señalados los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ son las hipotenusas h_1 y h_2 de los dos triángulos ΔOABy ΔOCD respectivamente y los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se pueden determinar como y_1 y y_2 respectivamente por estar dichos segmentos ubicados en el plano cartesiano, de la misma manera los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ se determinan como x_1 y x_2.

Por tanto se pueden determinar las proporciones como

$$\frac{y_1}{h_1} = \frac{y_2}{h_2} \quad (1) \qquad \frac{x_1}{h_1} = \frac{x_2}{h_2} \quad (2)$$

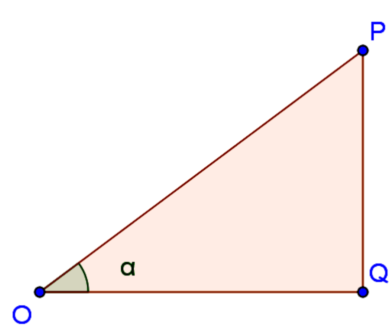
$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad (3) \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad (4)$$

$$\frac{h_1}{x_1} = \frac{h_2}{x_2} \quad (5) \qquad \frac{h_1}{y_1} = \frac{h_2}{y_2} \quad (6)$$

Por la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes, se tiene que cualquier cociente entre los pares de lados $\frac{y}{h}$ ó $\frac{x}{h}$ tienen un valor constante, por tanto se puede definir las anteriores razones, $\frac{y}{h}, \frac{x}{h}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{h}{x}, \frac{h}{y}$, como Seno, Coseno , Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante del ángulo α, respectivamente.

De otra forma, se considera el triángulo de la figura 2.16 considerando la hipotenusa y los catetos, de ésta manera se definen las razones en términos de los segmentos que forman los lados del triángulo rectángulo, es de aclarar que no implica ningún sistema de coordenadas, por lo tanto pueden utilizarse para definir las razones de cualquier ángulo agudo de un triángulo rectángulo, para éste caso del ángulo α, así:

Figura 2.16: Definición Razones Trigonométricas



$$Sen\ \alpha = \frac{Longitud\ del\ Cateto\ Opuesto}{Longitud\ de\ la\ Hipotenusa}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{Longitud\ del\ Cateto\ Adyacente}{Longitud\ de\ la\ Hipotenusa}$$

$$Tan\ \alpha = \frac{Longitud\ del\ Cateto\ Opuesto}{Longitud\ del\ Cateto\ Adyacente}$$

$$Cot\ \alpha = \frac{Longitud\ del\ Cateto\ Adyacente}{Longitud\ del\ Cateto\ Opuesto}$$

$$Sec\ \alpha = \frac{Longitud\ de\ la\ Hipotenusa}{Longitud\ del\ Cateto\ Adyacente}$$

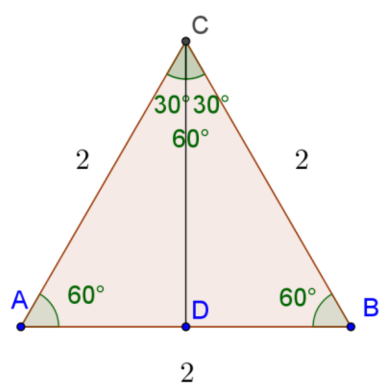
$$Csc\ \alpha = \frac{Longitud\ de\ la\ Hipotenusa}{Longitud\ del\ Cateto\ Opuesto}$$

2.7 Razones Trigonométricas de Ángulos Notables o Especiales

Hablar de ángulos notables no es claro para muchos lectores, sin embargo, el utilizar ese término se refiere al hecho de hacer referencia a algunos valores de ángulos que tienen origen particular y que a su vez dichos valores aparecen con determinada frecuencia en la vida cotidiana. Estos ángulos son de 30°, 45° y 60°.

Para originar dos de los ángulos notables, el de 30° y el de 60° se representa un triángulo equilátero y una de sus alturas (Ver figura 2.17)

Figura 2.17: Triángulo Equilátero

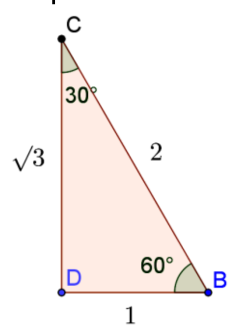


Al triángulo representado se le asigna medida arbitraria 2, es de considerar que la altura de un triángulo equilátero de lado 2, es también la bisectriz del ángulo del vértice en el que confluye la altura. En consecuencia el ángulo C, queda dividido en dos ángulos iguales de 30°, y en el triángulo ΔABC a partir de su altura $\overline{CD}$, quedan los triángulos ΔCDB y ΔADC, que son triángulos rectángulos, por tanto basta con fijarse en uno de ellos para abordar las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°; sin embargo, es necesario determinar la medida de la altura que es también en uno de los catetos de los triángulos rectángulos.

La medida de la altura $\overline{CD}$, a partir del Teorema de Pitágoras es de $\sqrt{3}$.

Se fija ahora la atención en el triángulo ΔCDB

Figura 2.18: Triángulo rectángulo a partir de un triángulo equilátero



En consecuencia las razones trigonométricas para el ángulo de 60°, son:

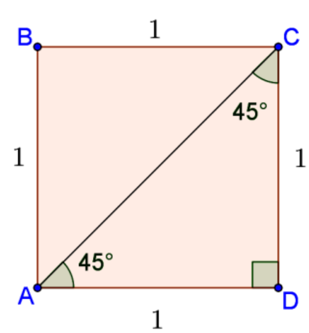
$$Sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad Cos\ 60° = \frac{1}{2} \qquad Tan60° = \sqrt{3}$$

Las razones para el ángulo de 30°, son:

$$Sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad Cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad Tan\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Las razones trigonométricas para el otro ángulo llamado notable, el de 45°, se obtiene a partir de la diagonal $\overline{AC}$ de un cuadrado $ABCD$. A partir de la diagonal se originan dos triángulos rectángulos con ángulos agudos de 45°. (Ver figura 2.19)

Figura 2.19: Cuadrado con una diagonal



La medida de la diagonal $\overline{AC}$, se obtiene a partir del teorema de Pitágoras dado que el triángulo ΔACD es rectángulo

$$1^2 + 1^2 = \overline{AC}^2$$

$$\sqrt{2} = \overline{AC}$$

En consecuencia las razones trigonométricas para 45° quedan definidas así:

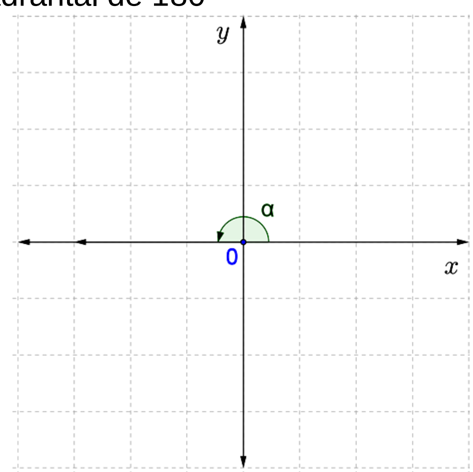
$$Sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad Cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad Tan 45° = 1$$

Las razones trigonométricas (Sen 45° y Cos 45°) planteadas de la manera descrita se obtienen luego de realizar un proceso de racionalización.

2.8 Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales

Los ángulos son considerados cuadrantales cuando el ángulo debe estar en posición normal, esto implica que el ángulo debe estar en un sistema de coordenadas cartesianas, su vértice debe coincidir con el origen de coordenadas y su lado inicial debe ser el semieje positivo x (Ver figura 2.20), de otra parte su lado terminal debe coincidir con alguno de los ejes coordenados.

Figura 2.20: Ángulo cuadrantal de 180º



Simbólicamente un ángulo cuadrantal se puede definir de la siguiente forma:

$\acute{A}ngulo\ cuadrantal = k * \frac{\pi}{2}$, con $k \in Z$. Sin embargo hay que considerar que un ángulo cuadrantal también puede ser negativo, por tanto expresados los ángulos cuadrantales en el sistema sexagesimal tendríamos: 0º, $\pm$90º, $\pm$180º, $\pm$270º, $\pm$360º, …

Las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales expresados en radianes se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 2.2: Valores de las Razones Trigonométricas de Ángulos cuadrantales en radianes

	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tan	0	Ind	0	Ind	0
Cot	Ind	0	Ind	0	Ind
Sec	1	Ind	-1	Ind	1
Csc	Ind	1	Ind	-1	Ind

Cuando un ángulo α se encuentra en posición normal y no es ángulo cuadrantal, se puede determinar a qué cuadrante pertenece el ángulo dependiendo del lado terminal del ángulo.

$0° < \alpha < 90°$ I cuadrante

$90° < \alpha < 180°$ II cuadrante

$180° < \alpha < 270°$ III cuadrante

$270° < \alpha < 360°$ IV cuadrante

Si el ángulo α es mayor a 360°, a la medida del ángulo se resta el equivalente a un ángulo giro, 360° tantas veces como sea necesario para obtener un ángulo menor a 360° y posteriormente poder determinar el cuadrante al que corresponde al ángulo dado.

2.9 Signos de las Razones Trigonométricas

Para determinar los signos de las funciones trigonométricas representadas por segmentos, tomamos en consideración el siguiente concepto referente al sistema coordenado cartesiano:

• Todos los segmentos perpendiculares al eje de las abscisas son positivos si están arriba de él y negativos si están abajo.

• Todos los segmentos perpendiculares al eje de las ordenadas son positivos si están a la derecha de él y negativos si están a la izquierda.

De acuerdo a la identificación de las funciones trigonométricas en los cuadrantes los signos resultantes son:

Tabla 2.3: Signos de las Razones Trigonométricas

	I	II	III	IV
SEN	+	+	-	-
COS	+	-	-	+
TAN	+	-	+	-
COT	+	-	+	-
SEC	+	-	-	+
CSC	+	+	-	-

Los signos realmente se hacen visibles desde un punto de vista gráfico usando la circunferencia unitaria para representar las razones trigonométricas.

2.10 Reducción de Ángulos al Primer Cuadrante

Reducir un ángulo al primer cuadrante consiste en hallar la razón trigonométrica de un ángulo α mayor a 90° $(\alpha > 90°)$ relacionándolo con un ángulo agudo al cual se le denomina ángulo de referencia.

El ángulo de referencia θ de un ángulo α, es el ángulo formado por el lado terminal de α y el eje x. Para cada uno de los cuadrantes los ángulos de referencia se notan de la siguiente forma:

Figura 2.21: Ángulos referenciales del I y II cuadrante

I CUADRANTE II CUADRANTE

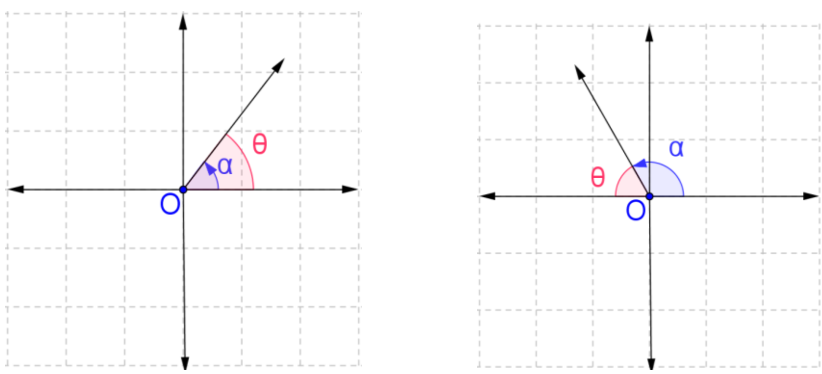
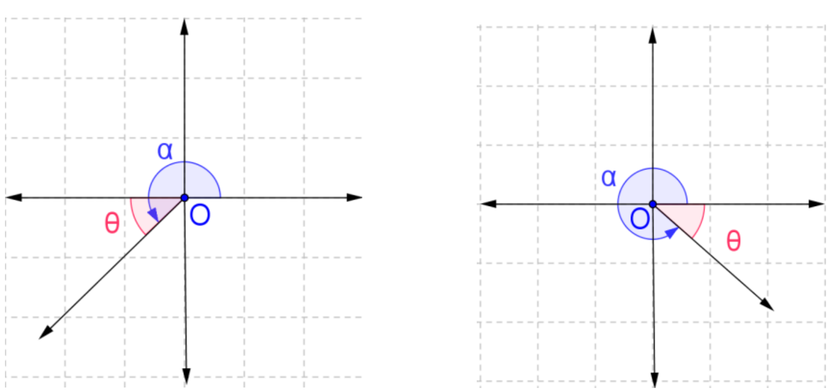


Figura 2.22: Ángulos referenciales del III y IV cuadrante

III CUADRANTE IV CUADRANTE



Es de considerar que en el primer cuadrante $\alpha = \theta$, es decir, no se requiere ángulo de referencia. En los otros tres cuadrantes se determina la siguiente relación:

En el II cuadrante, $\theta = 180° - \alpha$

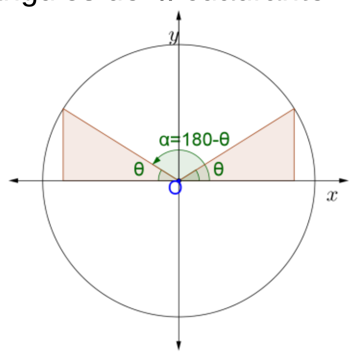
En el III cuadrante, $\theta = \alpha - 180$

En el IV cuadrante, $\theta = 360° - \alpha$

De manera que para hallar el valor de las razones trigonométricas de un ángulo α cualquiera mayor a 90° y menor a 360°, $(90 < \alpha < 360)$, es necesario determinar el valor de esta para su ángulo de referencia θ y se debe anteponer el signo apropiado de la razón trigonométrica dependiendo del cuadrante en que se encuentre el lado terminal de ángulo dado.

En el II cuadrante

Figura 2.23: Reducción de ángulos del II cuadrante



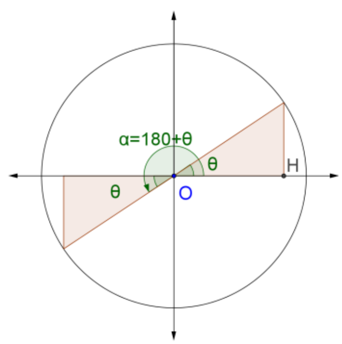
$$sen\alpha = sen(180 - \theta) = sen\theta$$

$$cos\alpha = cos(180 - \theta) = -cos\theta$$

$$tan\alpha = tan(180 - \theta) = -tan\theta$$

En el III cuadrante

Figura 2.24: Reducción de Ángulos del III cuadrante



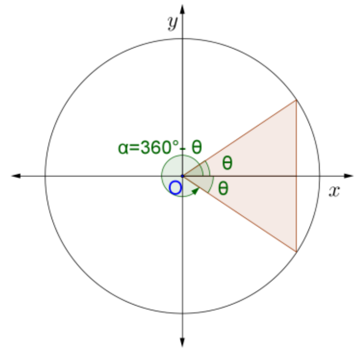
$$sen\alpha = sen(180 + \theta) = -sen\theta$$

$$cos\alpha = cos(180 + \theta) = -cos\theta$$

$$tan\alpha = tan(180 + \theta) = tan\theta$$

En el IV cuadrante

Figura 2.25: Reducción de Ángulos del IV cuadrante



$$sen\alpha = sen(360 - \theta) = -sen\theta$$

$$cos\alpha = cos(360 - \theta) = cos\theta$$

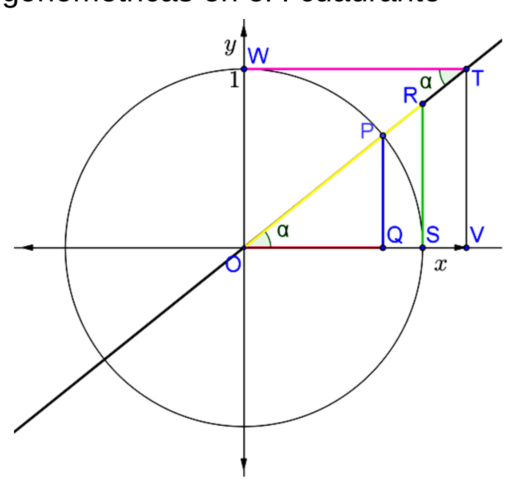
$$tan\alpha = tan(360 - \theta) = -tan\theta$$

2.11 La circunferencia unitaria y las razones trigonométricas como segmentos

Las razones trigonométricas se pueden representar gráficamente teniendo como referente una circunferencia de radio r en un sistema de coordenadas cartesianas, de manera que el centro de la circunferencia coincida con el origen del sistema de coordenadas cartesianas. A partir de la circunferencia y los ejes del plano cartesiano se representa un triángulo rectángulo, de manera que uno de sus ángulos agudos tenga su vértice en el centro de la circunferencia.

Si se tiene una circunferencia de radio 1, y centro $(0,0)$, en el sistema de coordenadas cartesianas, a esta se le llama circunferencia unitaria, en ella los cocientes planteados para indicar las razones trigonométricas se reducen porque se corresponden con los valores de ciertos segmentos de recta a los que se les denomina líneas trigonométricas, a continuación se describe cómo se obtienen las razones trigonométricas en el primer cuadrante.

Figura 2.26: Líneas Trigonométricas en el I cuadrante



Los triángulos OQP, OSR, TWO y OVT son semejantes,(Ver figura 2.26) los cuatro son rectángulos y tienen un ángulo agudo en común (por lo tanto, también el tercero). La consecuencia de esto es que las razones entre dos de los lados de uno cualquiera de los triángulos, es igual a la razón entre los lados homólogos en los otros triángulos.

Teniendo en cuenta esto y que el radio de la circunferencia es 1, se deducen las seis líneas trigonométricas así:

$$Sen\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$$

$$Cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

$$Tan\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS}$$

$$Cot\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{TV}} = \frac{\overline{WT}}{\overline{OW}} = \frac{\overline{WT}}{1} = \overline{WT}$$

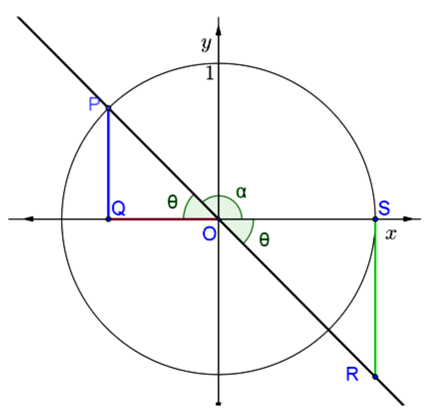
$$Sec\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

$$Csc\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OW}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

La forma de obtener las líneas trigonométricas en los otros tres cuadrantes es similar; sin embargo, como en la propuesta didáctica se profundizó en las tres razones trigonométricas básicas, (Seno, Coseno y Tangente), se presentan sólo éstas a continuación:

En el II cuadrante hay que considerar que hay un ángulo de referencia θ, para el ángulo α, (Ver figura 2.27), de manera que las razones trigonométricas de éstos dos ángulos solo difieren en el signo. También se tiene en cuenta que los triángulos OQP y OSR son semejantes, por tanto las razones Seno, Coseno y Tangente, se deducen así:

Figura 2.27: Líneas Trigonométricas en el II cuadrante



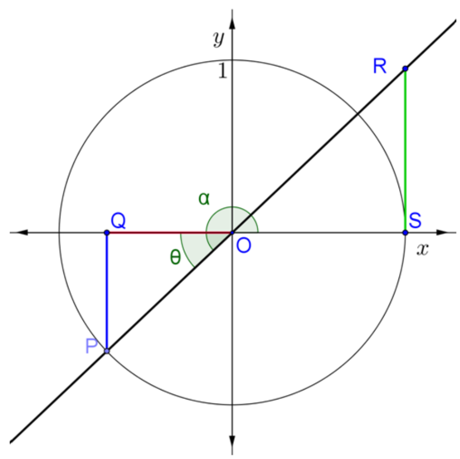
$$Sen\theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QP}}{1} = \overline{QP}$$

$$Cos\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

$$Tan\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{SR}}{1} = \overline{SR}$$

En el III cuadrante también se considera que hay un ángulo de referencia θ, para el ángulo α, (Ver figura 2.28), de manera que las razones trigonométricas de estos dos ángulos solo difieren en el signo. Además se tiene en cuenta que los triángulos OQP y OSR son semejantes, por tanto las razones Seno, Coseno y Tangente, se deducen así:

Figura 2.28: Líneas Trigonométricas en el III cuadrante



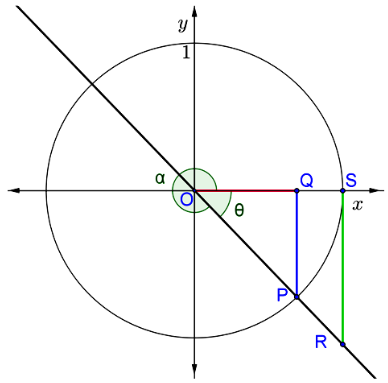
$$Sen\theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QP}}{1} = \overline{QP}$$

$$Cos\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

$$Tan\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{SR}}{1} = \overline{SR}$$

En el IV cuadrante también se considera que hay un ángulo de referencia θ, para el ángulo α, (Ver figura 2.29), de manera que las razones trigonométricas de estos dos ángulos solo difieren en el signo. Además se tiene en cuenta que los triángulos OQP y OSR son semejantes, por tanto las razones Seno, Coseno y Tangente, se deducen así:

Figura 2.29: Líneas Trigonométricas en el IV cuadrante



$$Sen\theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QP}}{1} = \overline{QP}$$

$$Cos\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

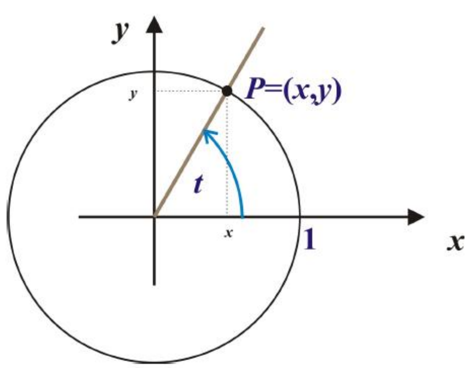
$$Tan\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{SR}}{1} = \overline{SR}$$

2.12 Definición de las Funciones Trigonométricas

2.12.1 Definición de Seno y Coseno

Considérese un número real t y construyamos el ángulo en posición normal de medida t radianes. Sea P el punto de intersección de la línea terminal del ángulo con la circunferencia unitaria centrada en el origen. (Ver figura 2.30)

Figura 2.30: Punto con coordenadas del lado terminal de un ángulo en posición normal



Si $P = (x, y)$, definimos $cos(t) = x$ y $sen(t) = y$

De la definición anterior de seno y de coseno, se tiene:

$$Dom\ sen = Dom\ cos = \mathbb{R}$$
$$|sen(t)| \leq 1, |cos(t)| \leq 1$$
$$sen^2(t) + cos^2(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$$

Definición: Sea f es una función periódica si existe $p > 0$ tal que, para todo $x \in Dom\ f$ se tiene $f(x + p) = f(x)$

El periodo es el mínimo valor de p para el cual $f(x + p) = f(x)$

$$sen(t + 2\pi) = sen(t)$$
$$cos(t + 2\pi) = cos(t)$$

2.12.2 Definición de Tangente

$$tan(t) = \frac{Sen\ (t)}{Cos\ (t)}$$

De la definición de Tangente se tiene:

$$Dom\ tan = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Es función Impar

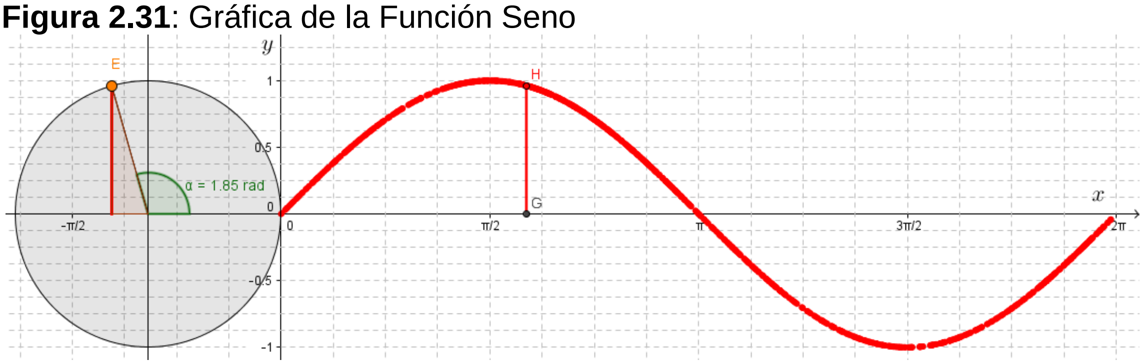
Es periódica con periodo π

2.12.3 Gráficas de las Funciones Trigonométricas

Las gráficas que se presenta en las figuras 2.31, 2.32 y 2.33 son realizadas con el mismo software que ha sido la herramienta principal de ésta propuesta didáctica, en ellas se plantea la circunferencia unitaria como referente, porque la construcción de éstas se hizo desde un contexto geométrico.

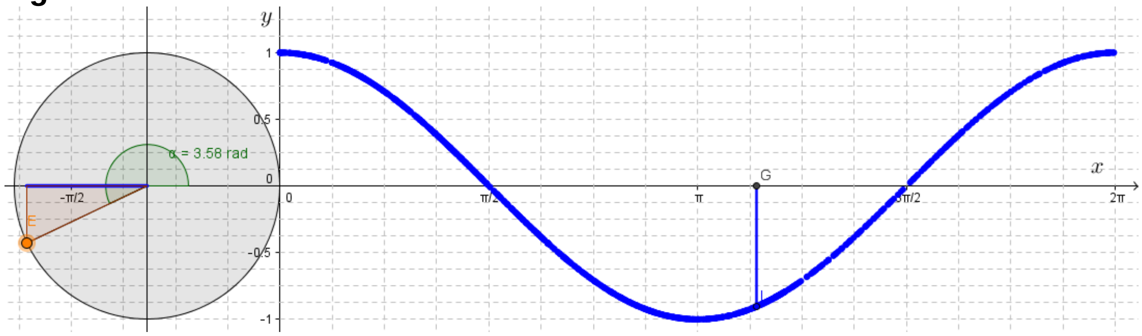
$$y = senx$$

Figura 2.31: Gráfica de la Función Seno



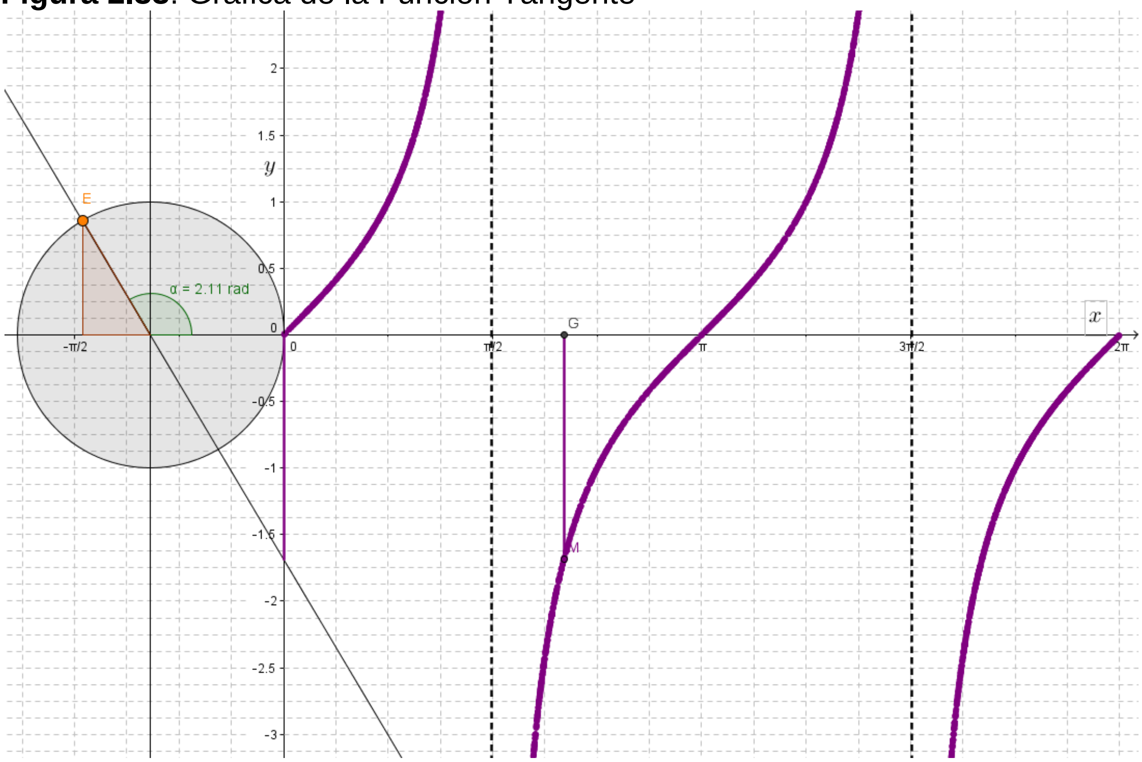
$$y = cosx$$

Figura 2.32: Gráfica de la Función Coseno



$$y = tanx$$

Figura 2.33: Gráfica de la Función Tangente



2.13 Acerca de los Sistemas De Representación

Cuando se pretende abordar un concepto matemático, hay que poner en juego un lenguaje para transmitirlo, en este lenguaje la forma de representarlo puede favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, por eso en la propuesta se consideran los sistemas de representación como componente conceptual bastante importante, porque los software de geometría dinámica se constituyen en una herramienta para representar las razones trigonométricas a los estudiantes. Al respecto (Arenas, s.f) señala los sistemas de representación que se deben tener en cuenta para enseñar el concepto de razón trigonométrica y los describe en las siguientes categorías.

Sistema de representación verbal

El sistema de representación verbal se caracteriza por el uso del lenguaje oral y escrito. Este sistema de representación cobra relevancia porque permite expresar situaciones de la vida real con claridad

Sistema de representación simbólico

El sistema de representación simbólico se identifica por el uso de símbolos para presentar los elementos y relaciones de contenido, éste sistema de representación es un requerimiento importante en el desarrollo de la estructura conceptual.

Sistema de representación numérico

El sistema de representación numérico juega un papel importante en la presentación de contenido al establecer las razones trigonométricas a partir de los datos de los triángulos rectángulos. La representación numérica permite expresar los valores numéricos de los ángulos y las longitudes de los lados en la resolución de triángulos y ecuaciones. Además, permite tabular los valores numéricos para la representación cartesiana de las funciones trigonométricas

Sistema de representación gráfico

La representación gráfica es un recurso fundamental en los temas de Trigonometría porque hace uso de relaciones métricas y espaciales geométricas que son muy difíciles de identificar sin la ayuda de una representación apropiada. Las razones trigonométricas requieren de la representación gráfica, teniendo en cuenta que el desarrollo de sus conceptos y nociones presentan una gran influencia del contexto geométrico.

En el sistema de representación gráfico podemos distinguir dos subsistemas: el sistema de representación gráfico cartesiano y el sistema de representación gráfico geométrico. El primero se presenta en el plano cartesiano y utiliza las herramientas de tipo gráfico y numérico junto con las propiedades contenidas en este sistema de referencia. Mientras que el segundo implementa el uso de los procedimientos y el lenguaje propios de la geometría. Los dos sistemas tienen relación a partir de sus características geométricas descritas en distintos lenguajes

Sistema de representación manipulativo

El sistema de representación manipulativo permite hacer construcciones geométricas de las razones trigonométricas con ayuda de recursos tecnológicos como el software GeoGebra. El uso de estas representaciones permite ver algunas propiedades geométricas del tema, y hace posible que los estudiantes manipulen las construcciones hechas y visualicen nuevas propiedades que no son evidentes en otras representaciones.

El AGD[5] GeoGebra facilita la transición entre los sistemas de representación que pueda tener un objeto matemático, éste permite a los estudiantes representar situaciones de manera numérica, gráfica y también manipulativa, porque las representaciones hechas con instrumentos computacionales se vuelven ejecutables (Moreno, s.f.).

[5] En adelante, Ambientes de Geometría Dinámica

3. REVISIÓN PEDAGÓGICA Y DIDÁCTICA

3.1 Enseñanza para la Comprensión.

Desde lo pedagógico la propuesta se enmarcó en la Enseñanza para la Comprensión, en adelante EpC. Al respecto de éste modelo pedagógico, Stone (1999) señala que la comprensión se concibe como la capacidad de usar el propio conocimiento de maneras novedosas, también como la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. En este sentido los estudiantes son el centro del proceso enseñanza aprendizaje y el fin último de este modelo al lograr la comprensión, es que ellos se encuentren en la capacidad de aplicar dichos conocimientos a situaciones nuevas; la EpC naturalmente pertenece a una corriente de pensamiento constructivista, son los estudiantes los principales actores en la construcción de sus conocimientos; sin embargo, para el proceso de enseñanza aprendizaje es importante que toda propuesta didáctica desde la EpC tenga como referente los siguientes interrogantes

i) ¿Qué tópicos vale la pena comprender?,
ii) ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
iii) ¿Cómo podemos promover la comprensión?,
iv) ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los estudiantes?

Las repuestas a estos interrogantes categorizan el currículo en los siguientes aspectos, *tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación formativa.*

Los tópicos generativos son temas, cuestiones, conceptos, ideas, etc., que ofrecen profundidad, significado, conexiones y variedad de perspectivas en un grado suficiente como para apoyar el desarrollo de comprensiones por parte del estudiante.

Las metas de comprensión identifican los conceptos, procesos y habilidades que los estudiantes comprendan. En tal sentido se pueden formular de dos formas, como enunciados y también como preguntas abiertas. Necesariamente las metas de comprensión deben enfocarse en aspectos centrales de los tópicos generativos.

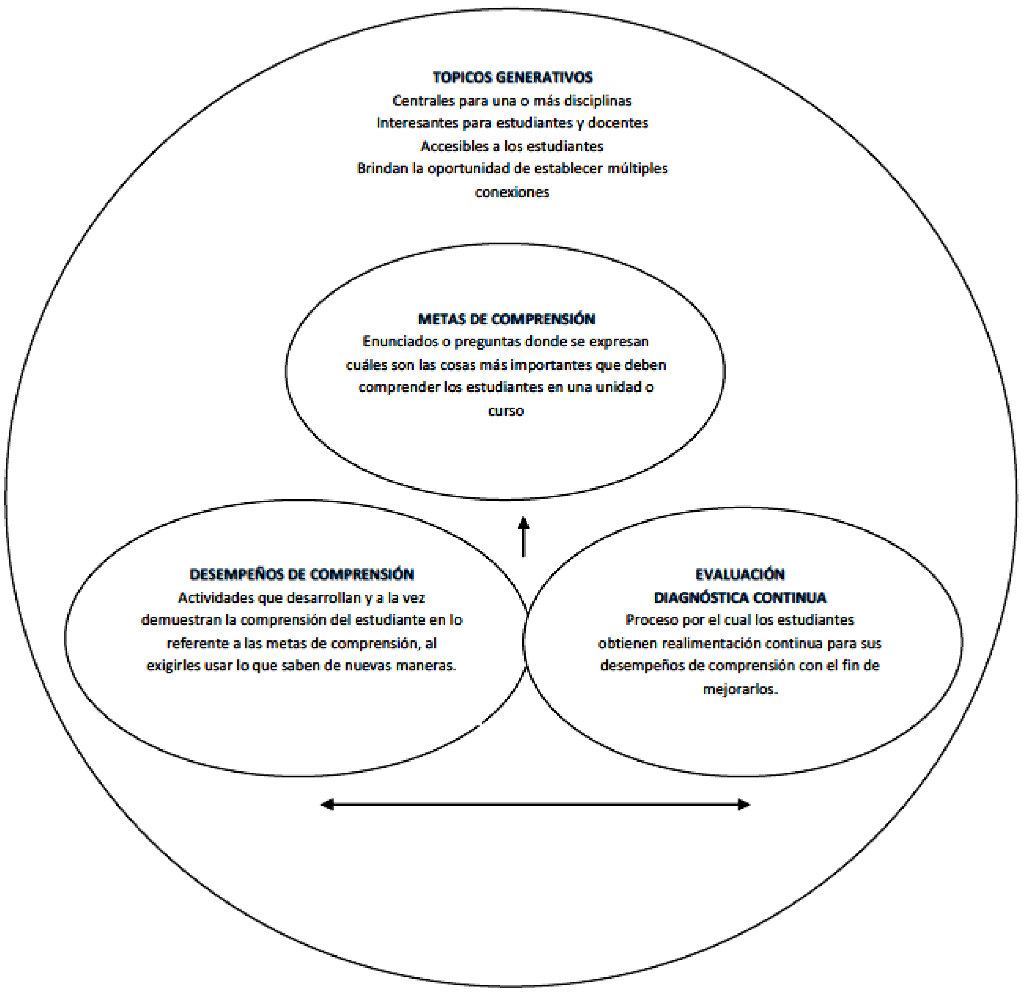
Los desempeños de comprensión se asumen como las actividades que se requiere que los estudiantes lleven a cabo para desarrollar comprensión de los tópicos generativos elegidos para ser abordados, esto exige también que los estudiantes usen conocimientos previos y reconfiguren, extrapolen, expandan y apliquen lo que ya saben.

La valoración continua o también evaluación formativa, implica definir criterios claros o pertinentes y a su vez proporcionar retroalimentación de los desempeños de comprensión llevados a cabo.

La propuesta didáctica descrita en éste trabajo, se enmarca en éste modelo pedagógico por el enfoque constructivista que naturalmente tiene la enseñanza para la comprensión.

La figura 3.1, ilustra cómo se estructuran los principales 4 componentes de la EpC

Figura 3.1: Componentes de la EpC[6]



Lo concerniente a los desempeños de comprensión es el insumo principal de la propuesta, dado que estos desempeños están planteados en cada uno de los 5 applets diseñados, porque cada uno contiene preguntas claves para que el

[6] Imagen tomada del texto Enseñanza para la comprensión. Guía para el docente. Tina Blythe. 1999

estudiante reconfigure su conocimiento y logre comprensión del principal tópico generativo elegido, la razón trigonométrica.

3.2 Geometría Dinámica como herramienta Didáctica

La geometría dinámica se puede resumir como la manipulación de elementos geométricos a través del software, con estos programas se puede construir objetos elementales como (puntos, segmentos, rectas, circunferencias, polígonos, etc.), a partir de los cuales es posible construir nuevos objetos y establecer relaciones entre ellos, de manera que al cambiar las condiciones de los objetos iniciales, se mantengan las relaciones existentes entre ellos previamente establecidas a través de un conjunto de herramientas disponibles.

CabriGéomètre, Geómetra, Cinderella, Regla y compás, KGeo, Dr. Genio o GeoGebra son algunos de estos programas con características similares en cuanto a la forma de trabajar, pero con diferencias en cuanto al conjunto de herramientas que ofrecen y en las posibilidades para establecer o construir relaciones entre los distintos objetos.

Dentro de las características que tiene un AGD (Ambiente de Geometría Dinámica) está la capacidad de arrastre, que permite reconocer los invariantes de una construcción, este dinamismo es la principal diferencia con el entorno de lápiz y papel, las construcciones dejan de ser estáticas para convertirse en móviles.

El potencial didáctico de la geometría dinámica va más allá de su poder ilustrativo. Se trata de problematizar la visualización, hacerla operativa, de manera que surja naturalmente la necesidad de explorar, conjeturar, predecir y verificar.

GeoGebra es el software que se usó en la presente propuesta, es considerado un software libre, no requiere de licencia alguna.

De otro lado, tiene la facilidad de instalarse como complemento en los navegadores web, sin embargo de esta forma se requiere de conexión online para trabajarlo.

3.3 Blogs

Una de las definiciones más aproximadas a esta herramienta, se puede encontrar Wikipedia[7] , allí se define como:

> *"Un blog (en español, también bitácora digital, cuaderno de bitácora, ciberbitácora, ciberdiario, o weblog) es un sitio web en el que uno o varios autores publican cronológicamente textos o artículos, apareciendo primero*

---

[7] http://es.wikipedia.org/wiki/Blog, consultado el 26 de diciembre de 2013

el más reciente, donde el autor conserva siempre la libertad de dejar publicado lo que crea pertinente…”.

Dentro de las características más predominantes que tienen los blogs está la interactividad, añadido a la facilidad de uso que tiene, ya que permite que los visitantes puedan dejar sus comentarios sobre la opinión u noticia mostrada, a su vez se tienen otras ventajas como las que se señalan a continuación:

- Accesibles desde cualquier navegador
- Clasifica contenidos en categorías, por medio de las etiquetas
- Enlazar blog con otros
- Moderar los comentarios de los visitantes al blog
- Posibilita la retroalimentación de cada noticia o entrada por distintos puntos de vista de los usuarios del blog.
- Facilita la creación de páginas internas con contenido específico y de esa forma también se puede categorizar la información publicada.
- Finalmente, la ventaja más importante para el caso de la presente propuesta didáctica es la de facilitar que aplicativos interactivos se puedan incrustar en él, por medio de códigos HTML, en la propuesta se usaron applets de GeoGebra, incrustados como entradas del blog.

El blog creado para la propuesta didáctica, además de tener contenido específico de las temáticas abordadas en cada applet, también fue una herramienta de comunicación, dado que los estudiantes tenían la posibilidad de hacer comentarios a las publicaciones hechas en él.

La dirección en donde se encuentra parte del contenido de la propuesta es: http://trigolppjt2013.blogspot.com/

Allí están a disposición cada uno de los 5 applets elaborados para la propuesta, junto con los formularios que se usaron para indagar en los estudiantes si la propuesta facilitó la comprensión de las temáticas abordadas.

Es de reconocer que el blog que se elaboró para la propuesta también brindó la posibilidad de ser un espacio de comunicación, puesto que los estudiantes podían escribir al docente por medio de él, además sirvió para alojar documentos, para que visualizaran las notas definitivas en cada período, para que visualizaran tutoriales existentes en la red, para alojar animaciones flash educativas, para incrustar formularios, y lo más importante, permitió alojar los applets de GeoGebra.

3.4 GeoGebra como herramienta para la enseñanza de las Matemáticas

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida. GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.

GeoGebra se considera un procesador geométrico, numérico y algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne Geometría, Álgebra y Cálculo, lo que permite ser usado en varias disciplinas como la Física, Arquitectura, Estadística, Probabilidad etc., debido a su gran potencial; sin embargo, se categoriza como software de Geometría Dinámica.

Con GeoGebra pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, etc., mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la barra de entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

De otra parte, en la actualidad hay programas de cálculo simbólico también llamados sistemas de algebra computacional (CAS en Ingles), un ejemplo de estos software podrían ser Derive y MathLab. Pero también existen programas considerados sistemas de geometría dinámica, en los que se permite la introducción directa en la ventana gráfica de objetos geométricos y la representación dinámica de los mismos, un ejemplo de éstos puede ser Cabri.

El software de geometría dinámica de la propuesta pone a disposición del estudiante un micromundo geométrico en el cual los conceptos trigonométricos pasan de ser simples dibujos o fórmulas a convertirse en “objetos geométricos” que pueden ser construidos y manipulados, de tal forma que, a través del software los estudiantes pueden poner en práctica sus ideas, explorar, analizar, tomar datos, formular y comprobar sus conjeturas y elaborar sus demostraciones.

Sin embargo, como lo considera Carranza (2011), GeoGebra tiene algo de las dos categorías pero no de forma separada y eso es lo que lo hace interesante o es su valor agregado. Porque combina las representaciones gráficas y simbólicas ofreciendo ambas al mismo tiempo por medio de su interfaz.

GeoGebra es un programa gratuito, tiene licencia GPL por sus siglas en Ingles, también conocida como GNU, es la licencia más usada en mundo del software y garantiza al usuario la libertar de usar, estudiar, compartir y modificar el software, es decir es software libre[8].

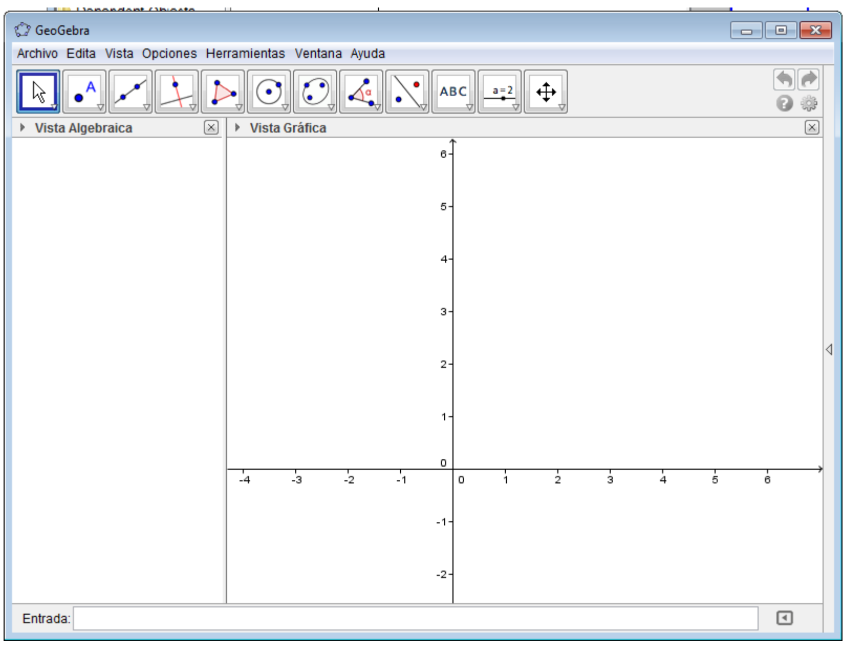
Actualmente se está convirtiendo en una herramienta revolucionaria en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. GeoGebra permite realizar construcciones dinámicas, fácilmente exportables a aplicaciones web, en las que podemos manipular las expresiones de las Matemáticas (geométricas, numéricas, algebraicas o tabulares) y observar la naturaleza de las relaciones y propiedades matemáticas a partir de las variaciones producidas por nuestras propias acciones. En su corta historia ya ha obtenido una serie de prestigiosos premios a la calidad didáctica y ha sido traducido a más de 40 idiomas.

En resumen, las características más destacadas son:

- Es software gratuito, libre y de código abierto. No les cuesta dinero a los centros educativos y pueden modificar elementos para tener funcionalidades que no se presentan en la versión estándar.
- Es multiplataforma, funciona en distintos sistemas operativos
- Es fácil de usar. Además existen numerosas formaciones, algunas de ellas gratuitas, impulsadas por colectivos de profesores y universidades.
- Es sencillo y a la vez potente. Posee una hoja de cálculo y sus numerosas vistas permite hacer representaciones algebraicas, de cálculo simbólico, cálculo estadístico y probabilístico.

Respecto a su facilidad de uso, se puede mencionar que su interfaz es bastante intuitiva, (Ver figura 3.2), se expone la ventana de trabajo, que contiene la barra de menús, la barra de herramientas, la barra de entrada y en el panel central la vista algebraica y la vista gráfica.

Figura 3.2: Interfaz de GeoGebra



[8] http://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra, consultado el 13 de Enero de 2014

En la barra de herramientas se pueden colocar una serie de comandos que son los que permiten realizar construcciones geométricas, de izquierda a derecha se encuentran en el siguiente orden, tal como se señala en el manual de GeoGebra, del portal educativo Plan Ceibal[9] de Uruguay.

1. *Seleccionar y mover*: Presenta tres herramientas que permiten manipular objetos. Se pueden mover libremente, mover en torno a un punto y registrar cambios en su posición.
2. *Creación de puntos*: Permite crear distintos tipos de puntos; puntos libres, puntos a partir de una intersección o puntos medio (de dos puntos, de un segmento o de una circunferencia).
3. *Creación de Rectas*: Permite crear segmentos de recta, rectas, semirrectas y vectores.
4. *Lugares geométricos*: Esta categoría posibilita la creación de diversos lugares geométricos.
5. *Polígonos*: Permite crear polígonos regulares e irregulares.
6. *Circunferencias y arcos*: Nos da la posibilidad de crear circunferencias y arcos de circunferencia a partir de distintos datos.
7. *Lugares geométricos 2*: Permite crear otros lugares geométricos, particularmente los que tienen forma curva, tales como la elipse, parábola, hipérbola, etc..
8. *Medir*: Brinda herramientas para obtener distintas medidas. Se puede medir distancia o longitud, ángulo, área de una figura como las de la circunferencia, polígono o cónica, y pendiente de una recta.
9. *Transformaciones*: Permite aplicar distintas transformaciones a las figuras que ya se encuentren trazadas, como simetría, traslación, homotecia y rotación.
10. *Objetos*: Permite incorporar objetos variados dentro del área de trabajo, incorporando imágenes, cuadros de texto y deslizadores.
11. *Extras*: Dentro de dicha categoría se pueden encontrar herramientas para interactuar con todo aquello que visualizamos en la pantalla, como modificar las opciones de acercamiento, mover la vista del área de trabajo, eliminar un objeto, etc.
12. *Vista*: Permite cambiar el zoom

Las categorías de comandos descritos se encuentran de manera predeterminada o por defecto, pero se pueden modificar dependiendo de las necesidades del usuario.

Acerca de GeoGebra como herramienta para la enseñanza en particular de la Trigonometría es destacable que básicamente la mayoría de las representaciones gráficas que usualmente realiza un docente para las explicaciones a sus estudiantes se pueden hacer con el software, gracias a su versatilidad y la posibilidad de facilitar la transición entre los sistemas de representación.

[9] http://apoyoceibal-oeste.wikispaces.com/file/view/MAN.DOC.GeoGebra.pdf, consultado el 13 de enero de 2014

La utilización de un programa de geometría dinámica en matemáticas permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

3.4.1 Acerca de los Applets de GeoGebra

Un applet se considera un componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, como por ejemplo un navegador. El *applet* debe ejecutarse en un *contenedor*, que le proporciona un programa anfitrión, mediante un *plugin*

A diferencia de un programa, un a*pplet* no puede ejecutarse de manera independiente, ofrece información gráfica y a veces interactúa con el usuario, típicamente carece de sesión y tiene privilegios de seguridad restringidos. Un *applet* normalmente lleva a cabo una función muy específica que carece de uso independiente.

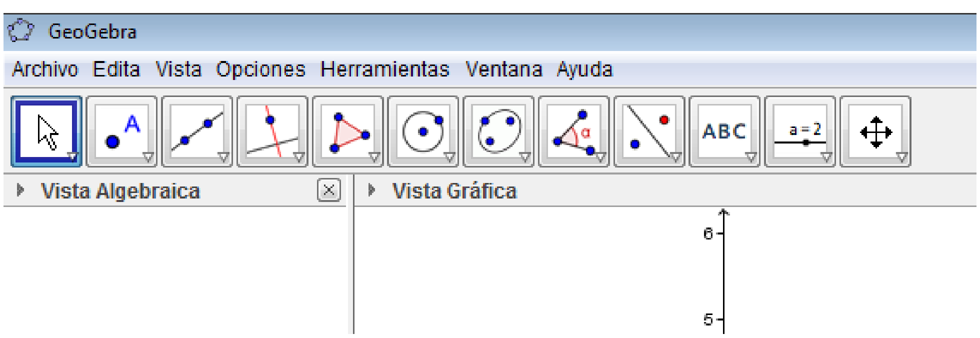
Un applet de GeoGebra es un dibujo realizado en GeoGebra que se puede insertar en una página web. Las ventajas que tienen los applets de GeoGebra son los siguientes:

A. Los dibujos son muy fáciles de hacer con GeoGebra.
B. Una vez realizado el dibujo en GeoGebra, se genera el a*pplet* automáticamente.
C. Son interactivos, es decir, se pueden manipular los objetos del dibujo.

La siguiente secuencia de pasos describe como incrustar un applet en un blog. Esto fue realizado en la propuesta para que los estudiantes tuvieran acceso a los applets luego de que el docente los proyectó en sus clases.

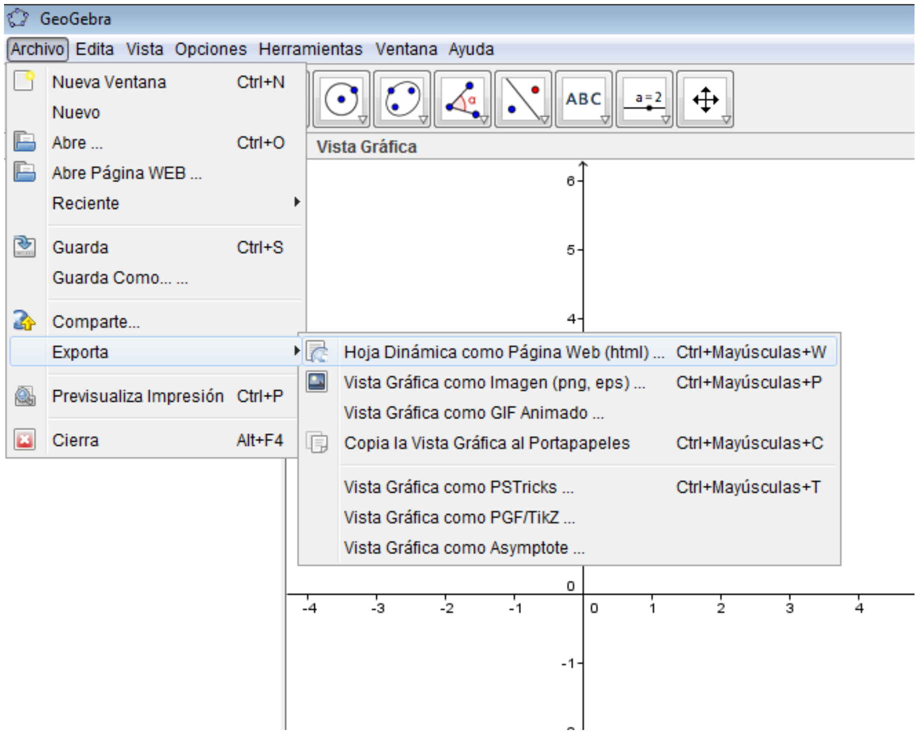
1. Ejecutar el programa GeoGebra o en su defecto instalar la versión online del software que existe para navegadores de internet.
2. Crear un nuevo archivo (Dibujo) utilizando los comandos de la barra de herramientas para realizar la construcción geométrica que se requiera.

Figura 3.3: Comandos barra de herramientas GeoGebra

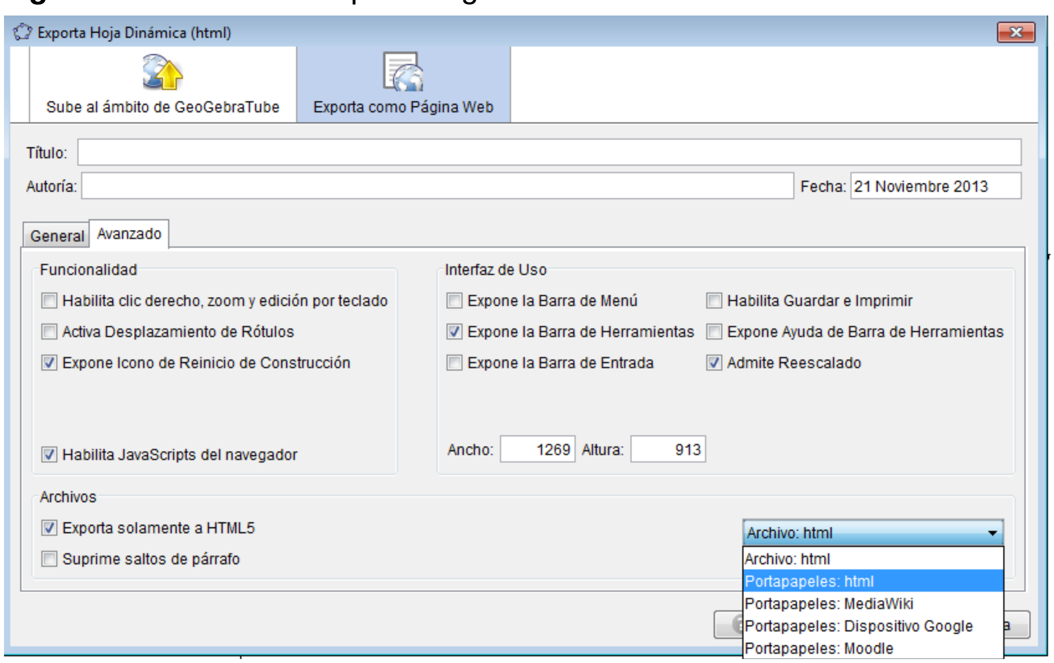


3. Una vez hecha la construcción usando las herramientas y comandos del software, se puede incrustar por medio de su código HTML y para ello se selecciona el comando "Archivo->Exporta->Hoja Dinámica como página Web" (Ver figura 3.4).

Figura 3.4: Comando exportar como HTML



4. Posteriormente al cuadro de dialogo emergente seleccionamos el comando "Exporta como página web->Portapapeles: HTML"
Figura 3.5: Comando copia código HTML



5. Finalmente ya se tiene en el portapapeles el código para ser copiado en alguna página web.

3.5 Acerca de los Formularios de Google Docs

Google lleva ya varios años colocando a disposición de sus usuarios una serie de herramientas, aplicaciones y servicios gratuitos, que van orientados a la productividad, colaboración y comunicación basadas en la web. Entre estas herramientas se encuentra Google Docs, la cual permite generar, almacenar, y administrar documentos en línea, tales como documentos de texto, hojas de cálculo, planillas, presentaciones y formularios. Para la creación de estos documentos no se requiere la instalación de ningún software, solo se requiere tener una cuenta Google, de un navegador y de conexión a internet, es decir, es una herramienta online.

Las herramientas de Google Docs incluyen además de una combinación de servicios, servicios integrados como el chat y el correo electrónico que permite una mejor interacción, y comunicación entre los usuarios. De otro lado cuando se crea cualquier tipo de documento, éste se puede compartir con cualquier otro usuario.

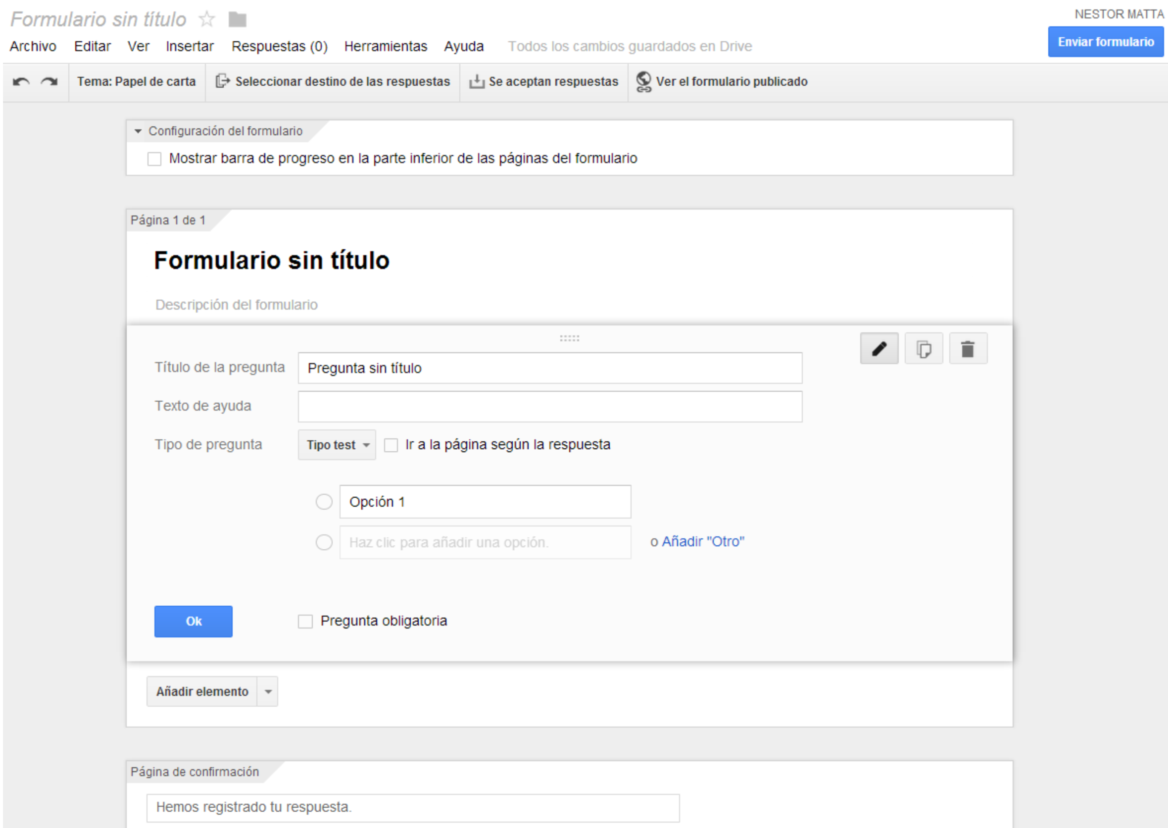
Dentro de estas herramientas existe la posibilidad de crear *Formularios*, los cuales permiten recopilar información con diferentes tipos de estructura (test, selección múltiple, comentarios, etc.). Éstos se pueden publicar como páginas web, enviarse por correo electrónico o incrustar como contenido en una página web, para que varias personas diligencien la información solicitada.

Entre las características positivas que tiene esta herramienta para recopilar información, está la de generar automáticamente estadísticas detalladas, apoyadas con gráficos. El uso de los formularios de Google Docs, podría tener las siguientes finalidades:

- Realizar diagnósticos para comprobar el nivel de conocimientos previos de un tema.
- Evaluar la labor docente
- Elaborar encuestas de forma colectiva
- Recopilar información como material de apoyo para una investigación
- Indagar hábitos de lectura para una biblioteca

A continuación se presenta una captura de pantalla de la interfaz de Google Docs en la que se visualiza como diseñar las preguntas, además de las opciones de la barra de herramientas que tiene GoogleDocs.

Figura 3.6: Captura de pantalla Interfaz de GoogleDocs para creación de Formularios



Los formularios de Google Docs en la presente propuesta se usaron para dos finalidades:

Determinar el grado de conceptualización de los temas abordados en la propuesta.

Determinar el impacto de la propuesta por medio de una encuesta de satisfacción.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta didáctica responde a la dificultad que se tiene para enseñar Trigonometría cuando no se tienen muchos recursos o herramientas para realizar distintos tipos de representaciones en una clase tradicional.

Es de notar que el PEI de la institución Educativa Distrital Leonardo Posada Pedraza, tiene como enfoque pedagógico la Enseñanza para la Comprensión desde lo curricular. Por tal razón la presente propuesta también se enmarca en dicho modelo pedagógico pero evidentemente con la mediación de tecnologías de la información y la comunicación. Desde éste punto de vista la EpC permite que la comprensión no signifique el solo hecho de adquirir conocimientos y desarrollar unas ciertas habilidades, sino que posibilite a los estudiantes capacidades para explicar, demostrar, dar ejemplos, generalizar, establecer analogías, etc. El uso de TICs apunta en la dirección de lograr una forma de recapturar el mundo real y reabrirlo al estudiante en el interior del aula con amplias posibilidades de interacción y manipulación, así como también proporcionar representaciones de conceptos y modelos abstractos.

Desde el punto de vista cronológico el diseño de la propuesta didáctica tuvo en un primer momento, una fase de experimentación y de apropiación de los comandos del Software GeoGebra, por parte del docente y un segundo momento en el que se diseñó en específico cada uno de los 5 applets que se describen adelante. De otra parte la fase de diseño se enfoca también en la creación del blog en el que se insertaron los applets y a su vez en la creación de cada uno de los 5 formularios que se adjuntaron a cada applet con el fin de que los estudiantes mostraran su comprensión buscando conceptualizar a partir de las preguntas planteadas enfocados en los tópicos descritos en cada applet, los cuales son: razones trigonométricas de un ángulo agudo, signos de las razones trigonométricas, razones trigonométricas de ángulos cuadrantales, reducción de ángulos al primer cuadrante y gráficas de las funciones trigonométricas.

Posteriormente los estudiantes hicieron uso de los applets y los formularios alojados en el blog creado para la propuesta, para facilitar el aprendizaje conceptualizando los temas abordados dando cuenta de las habilidades de pensamiento requeridas para mostrar su competencia argumentativa.

Finalmente se hace un análisis descriptivo de las respuestas consideradas acertadas y no acertadas consignadas en los formularios a juicio del docente, apoyado en tablas y gráficos.

4.1 Identificación Del Problema

En la enseñanza de la trigonometría y en general de las matemáticas es importante usar un lenguaje visual para llevar a los estudiantes ideas abstractas, esto implica el uso de herramientas, por eso la enseñanza de la Trigonometría no es tarea fácil cuando no se tienen unos buenos recursos de representación distintos a los tradicionales, tablero y marcador, en general éstas son las herramientas que utilizan los docentes de matemáticas en el contexto del distrito capital. Por parte de los estudiantes, éstos se limitan al uso de calculadora para hallar las razones trigonométricas de ángulos dados, si de herramientas se trata.
Al respecto del uso de herramientas Fiallo y Gutiérrez (2006) consideran que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría puede llegar a ser rutinario, mecánico y memorístico cuando no se dan condiciones suficiente para ello y de otra parte desde el aspecto cognitivo hay investigaciones que señalan que el concepto de razón trigonométrica no se acentúa porque se generaliza su uso para cualquier tipo de triángulo para lo cual los recursos de representación computacionales podrían optimizar dicho aprendizaje. De otra parte Markel y Weber (Citados en Fiallo, 2010) señalan que la importancia a la Trigonometría se ha reducido en las escuelas secundarias y e incluso plantean que estudiantes con buenas aptitudes en matemáticas tienen vacíos en los conceptos trigonométricos más fundamentales.

4.2 Delimitación

La propuesta didáctica se aplicó en dos cursos del grado décimo conformados por 36 estudiantes cada uno de la jornada tarde del colegio Leonardo Posada Pedraza IED, ubicado en la localidad 7 Bosa con dirección Cra. 92 # 72 – 42 Sur, Bogotá, Colombia. El ciclo 5 está organizado en tres énfasis (Gestión empresarial, Prototipos tecnológicos y Artes). Allí se cuenta con 2 salas de informática, el colegio cuenta con servicio de internet y conexión wifi y los docentes de matemáticas contamos con nuestros salones de clases (1 por docente) con un televisor para hacer proyecciones o en su defecto en ocasiones se usa video proyector en las clases. Los estudiantes rotan por los salones en los cambios de clase, para dirigirse a sus clases. Sus edades oscilan entre los 14 y 16 años de edad, la mayoría se ubican en estrato económico 2.

4.3 Objetivos de la Propuesta didáctica

4.3.1 Objetivo General

Diseñar y aplicar una propuesta didáctica que favorezca la enseñanza de las Razones Trigonométricas usando el software libre GeoGebra

4.3.2 Objetivos Específicos

- Diseñar applets de GeoGebra que permitan ser herramienta para la enseñanza de las razones trigonométricas
- Diseñar formularios de Google Docs, con preguntas sobre razones trigonométricas encaminadas a la conceptualización de los temas a abordar en la propuesta
- Diseñar e implementar un blog que permita alojar todo el contenido de la propuesta didáctica, los applets y los formularios de Google Docs.
- Determinar el impacto que tiene la propuesta didáctica en los estudiantes objeto de estudio determinando el grado de satisfacción con el uso del software de geometría dinámica GeoGebra.

4.4 Applets de la Propuesta

Los tópicos abordados en cada uno de los applets se describen a continuación:

- Razones trigonométricas de un ángulo
- Reducción de ángulos al primer cuadrante
- Signos de las Razones trigonométricas
- Razones Trigonométricas de ángulos cuadrantales
- Gráficas de las Razones Trigonométricas.

Los applets de la propuesta tienen enunciado la *meta de comprensión* que se pretende que el estudiante afiance junto con el *desempeño de comprensión* que en términos procedimentales son las acciones que debe realizar el estudiante, es decir, las actividades. Desde ese punto de vista el estudiante debe realizar dos cosas, manipular los applets y observar para conceptualizar dando respuesta a las preguntas planteadas en los formularios.

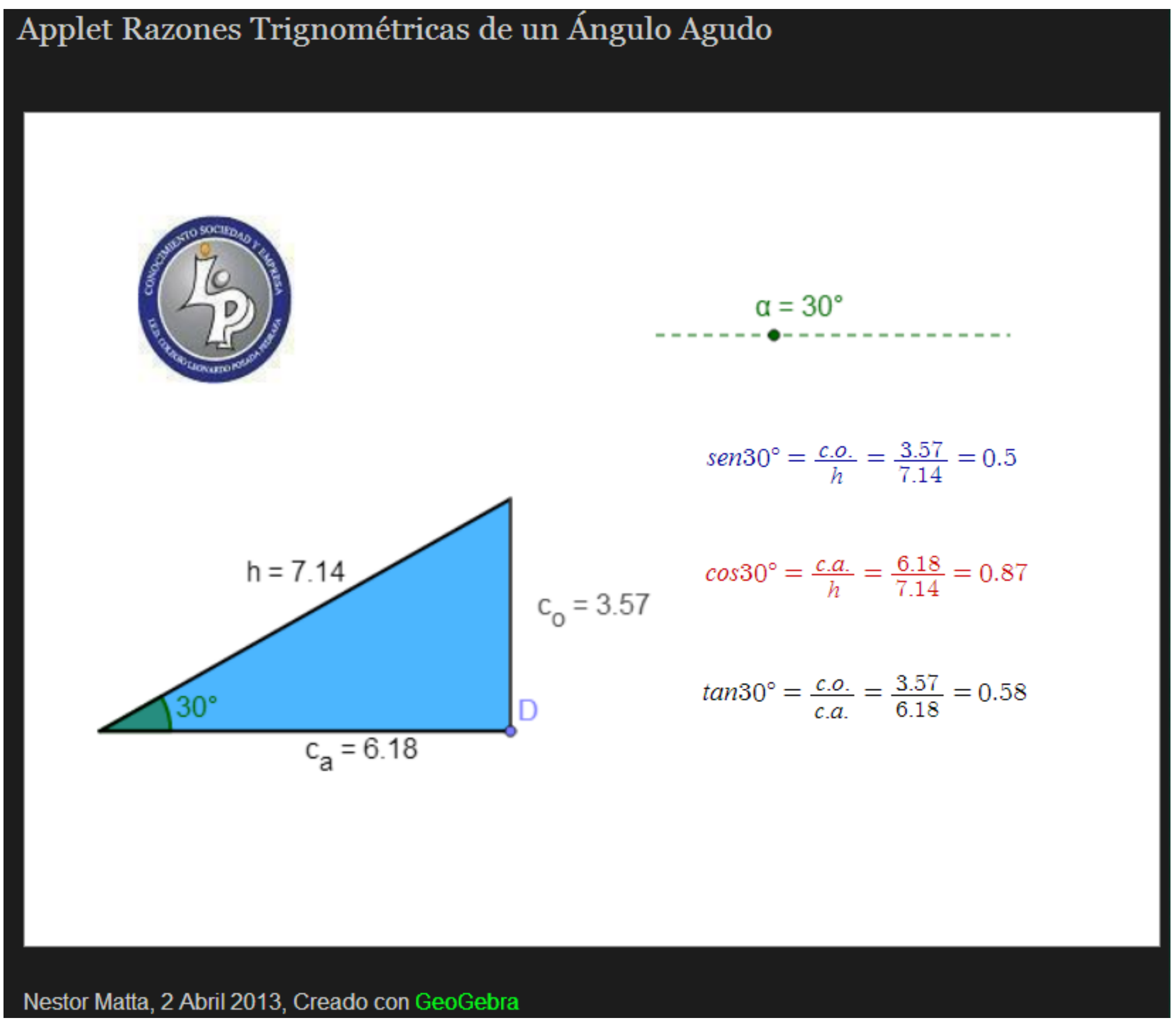
4.4.1 Applet Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

Meta de comprensión:
Reconocer la variación de las razones trigonométricas dependiendo de la medida del ángulo agudo en el triángulo rectángulo y la invariabilidad de éstas en triángulos semejantes.

Descripción del Desempeño de Comprensión:

El estudio de las razones trigonométricas es conveniente que inicie a partir del análisis de dichas relaciones en el triángulo rectángulo, el applet elaborado para éste tópico presenta esta relación de una manera dinámica porque se visualiza cómo varían las medidas de los lados del triángulo rectángulo y del ángulo agudo. Además también permite visualizar qué medidas cambian y cuáles permanecen invariantes al modificar la medida de los lados y del ángulo agudo. De ésta forma el estudiante puede evaluar los valores de las razones trigonométricas de algunos ángulos en particular.

Figura 4.1: Captura de pantalla del Applet Razones Trigonométricas de un Ángulo agudo



4.4.2 Applet Reducción de Ángulos al Primer Cuadrante

Meta de comprensión:

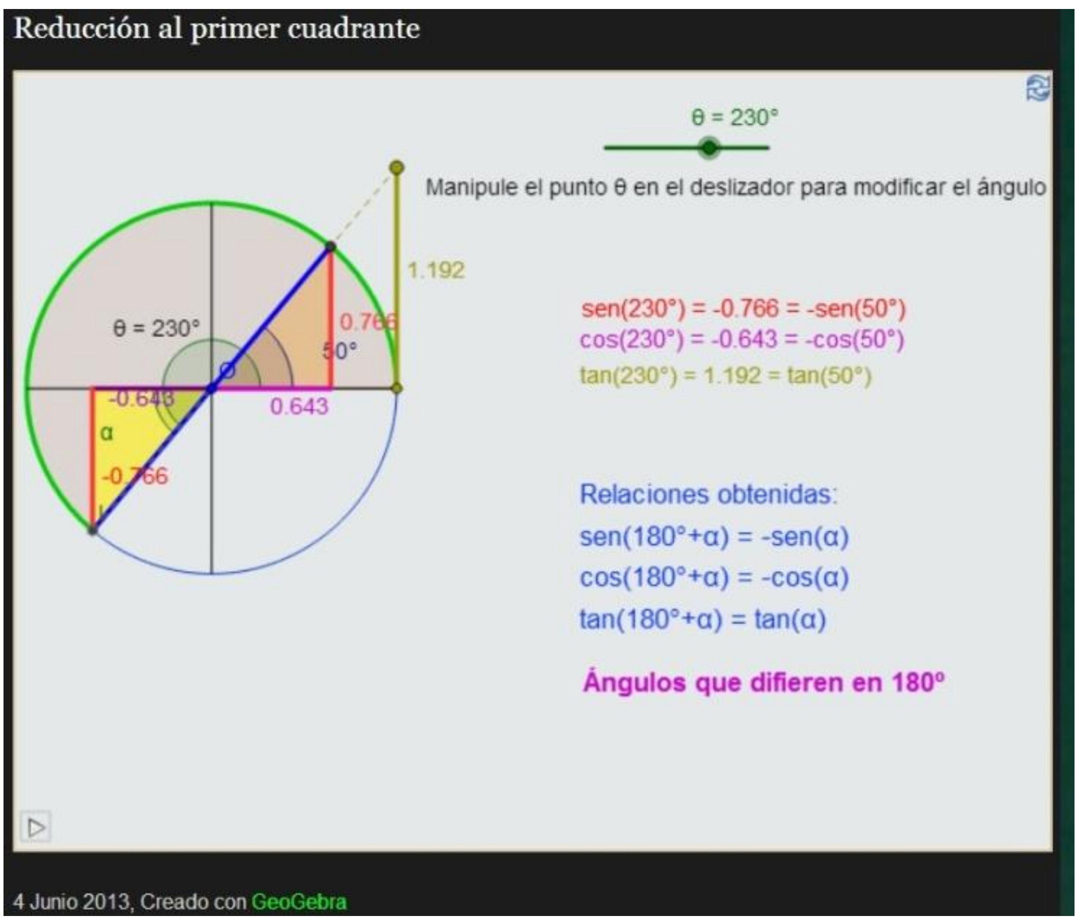
Determinar las razones trigonométricas de un ángulo que no es agudo, en función de otro que si lo sea, a partir de las relaciones existentes en los cuadrantes y de los signos de las razones trigonométricas.

Descripción del Desempeño de Comprensión:

Determinar las razones trigonométricas de ángulos mayores a 90°, requiere de un mayor grado de abstracción cuando un estudiante solo ha abordado el estudio del triángulo rectángulo, porque desde allí únicamente se determinan las razones trigonométricas de ángulos agudos. Por tanto, el applet elaborado para abordar ésta temática presenta claramente la relación entre el ángulo mayor a 90° y el ángulo referencial α, al que se reduce teniendo en cuenta el signo de la razón trigonométrica.

Es de mencionar que el applet, también tiene una relación directa entre los colores entre los tipos de representación simbólico y gráfico dado que las razones trigonométricas tienen el mismo color en los dos sistemas de representación.

Figura 4.2: Captura de pantalla del Applet reducción al primer cuadrante

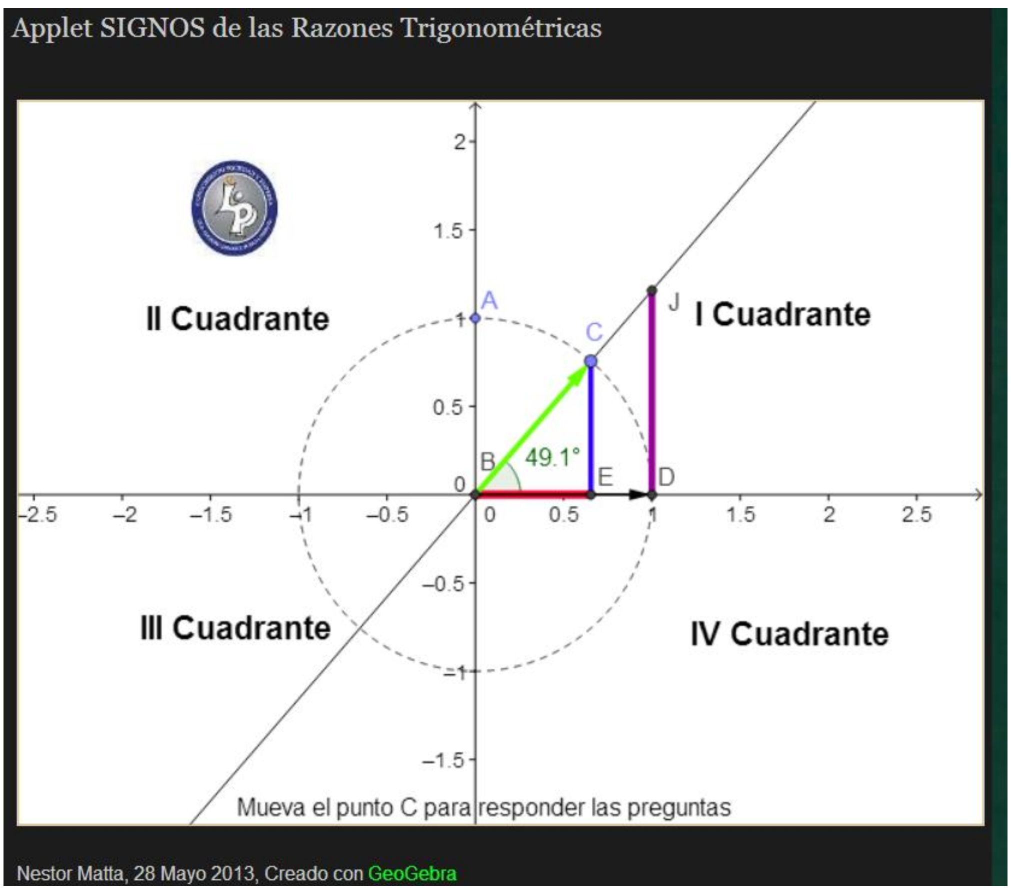


4.4.3 Applet Signos de las Razones Trigonométricas

Meta de comprensión:
Reconocer la variación de los signos de las razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes.

Descripción del Desempeño de Comprensión:
El estudio de las razones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria facilita en gran medida la comprensión de todas las relaciones que subyacen en dicho concepto; sin embargo, abordar las razones trigonométricas para ángulos mayores a 90° implica considerar que los signos de cada una de ellas varían dependiendo del cuadrante en que se encuentre el lado terminal del ángulo en posición normal que se esté abordando. Por tanto, el applet diseñado para esta temática al contener la circunferencia unitaria y a su vez estar representados con colores específicos los segmentos que representan gráficamente el seno, el coseno y la tangente, posibilitan que el estudiante visualice el signo, teniendo en cuenta los signos de los semiejes del plano cartesiano.

Figura 4.3: Captura de pantalla del Applet signos de las razones trigonométricas



4.4.4 Applet Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales

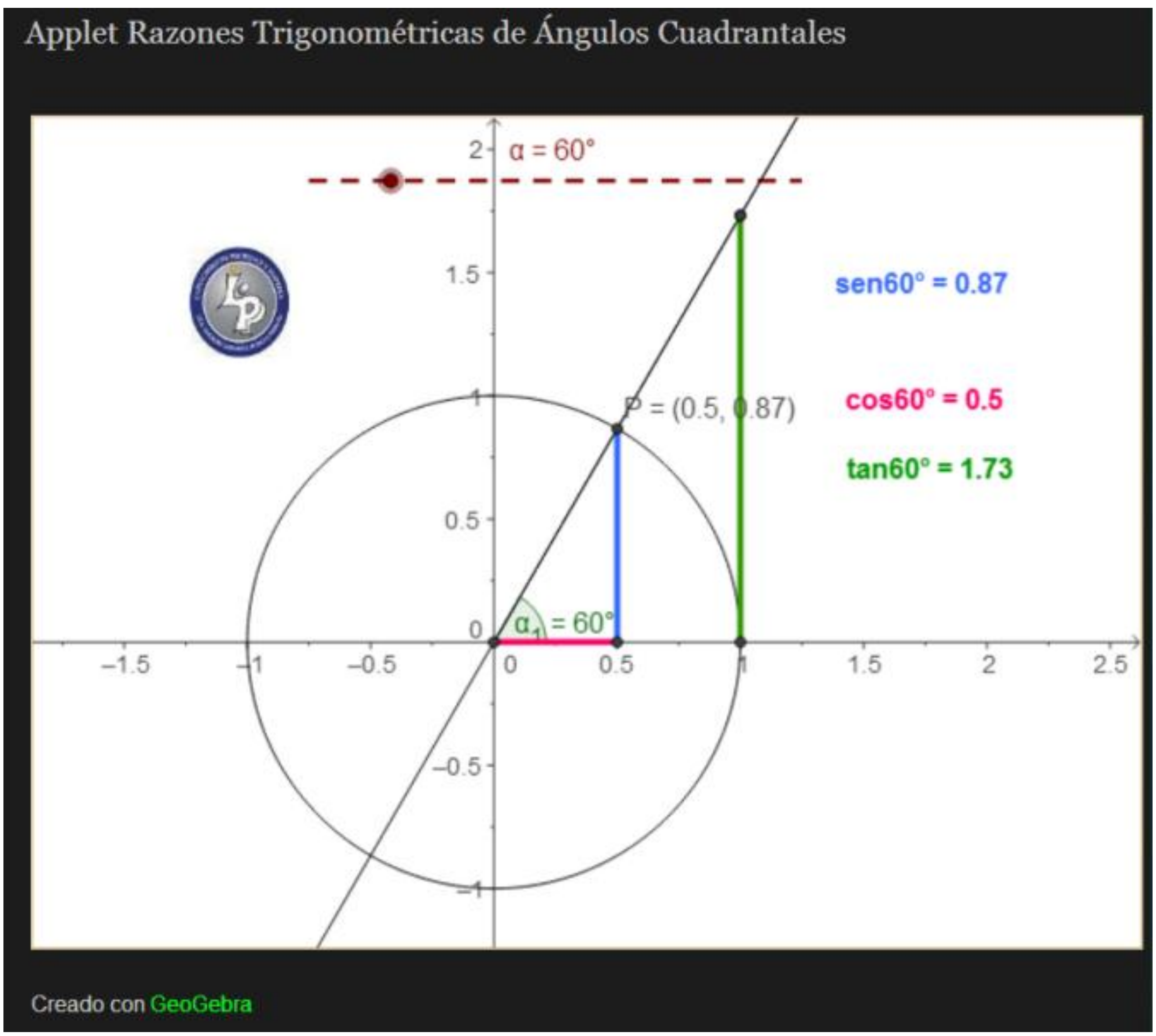
Meta de comprensión:

Identificar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales.

Descripción del Desempeño de Comprensión:

El Applet diseñado para esta temática, permite visualizar como varía el seno, el coseno y la tangente del ángulo en posición normal considerado, teniendo también como referencia la circunferencia unitaria. La modificación de la medida del ángulo permite aproximar a los valores específicos de los ángulos cuadrantales, 0°, 90°,180°,270°,360°, y a partir de ésta aproximación deducir y observar el valor de las razones trigonométricas de éstos ángulos en particular.

Figura 4.4: Captura de pantalla del Applet razones trigonométricas de ángulos cuadrantales



4.4.5 Applet Gráficas de las Funciones Trigonométricas

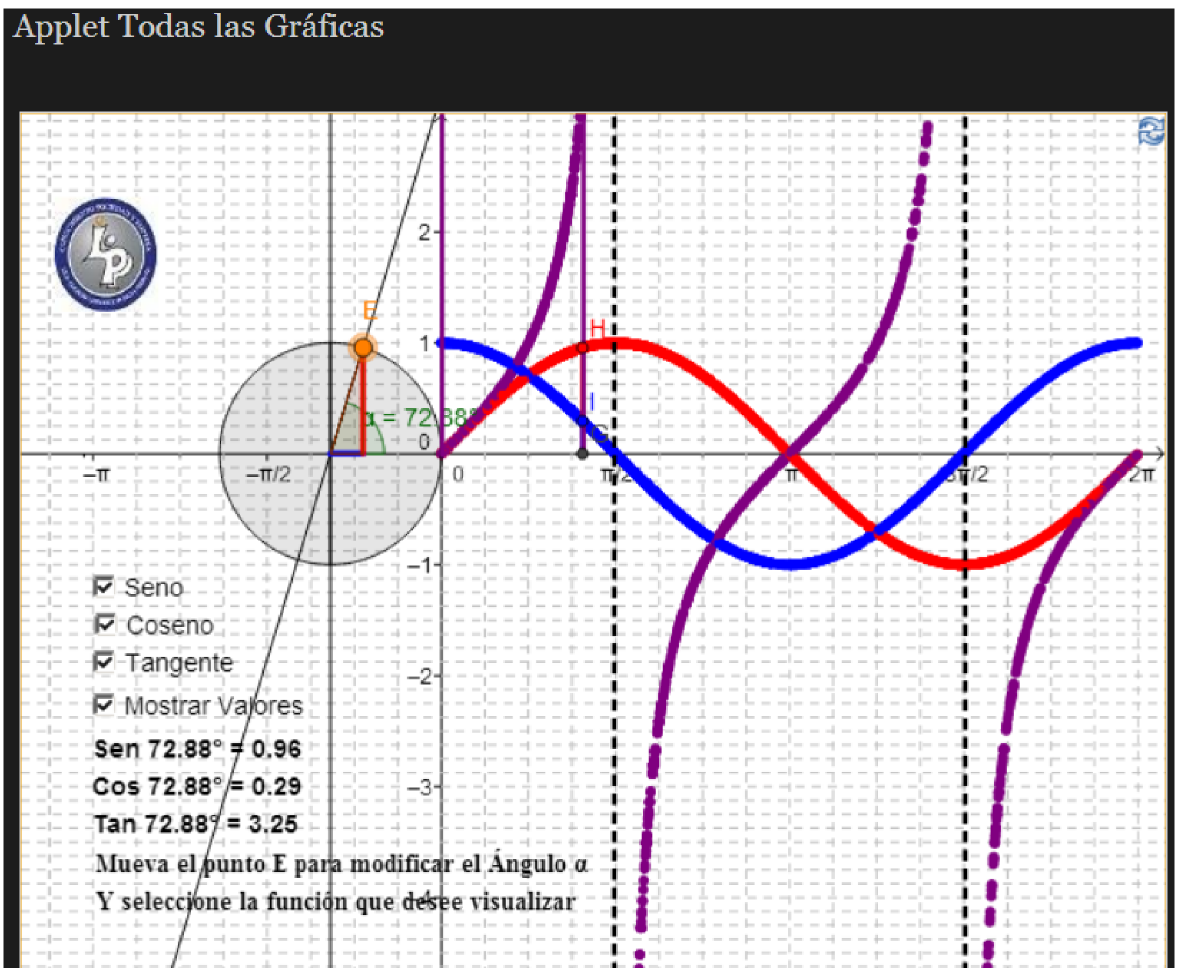
Meta de comprensión:

Comprender el comportamiento, la variación y el período de las razones trigonométricas.

Descripción del Desempeño de Comprensión:

La construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas con apoyo de la circunferencia unitaria facilita la transición de pasar de la razón a la función, dado que en el plano cartesiano ya se visualizan las dos variables, el ángulo en radianes y el valor de la función trigonométrica, el cuál es interpretado en un sistema de representación gráfico, de modo que se visualiza en el applet como varía cada una de las funciones a medida que se modifica el valor del ángulo y adicional a esto, es importante mencionar que de ésta forma no es necesario realizar la representación tabular de la función.

Figura 4.5: Captura de pantalla del Applet gráficas de las funciones trigonométricas.



4.5 Formularios de la Propuesta

A cada uno de los 5 applets diseñados para la propuesta didáctica se le anexaron formularios que contenían preguntas de índole conceptual. Las preguntas planteadas en los formularios hacen parte del componente de evaluación en la Enseñanza para la Comprensión, que se conoce como valoración continua, los estudiantes dieron respuesta a cada una de las preguntas anexas a cada applet en el blog. Las respuestas dadas por los estudiantes son el insumo para el análisis descriptivo realizado en el presente trabajo. Estas respuestas fueron a su vez socializadas en el aula de clase, esto porque dentro de la valoración continua se recomienda siempre retroalimentar los resultados para generar oportunidades de reflexión desde el inicio y a lo largo de cualquier secuencia de instrucción enmarcada en la EpC.

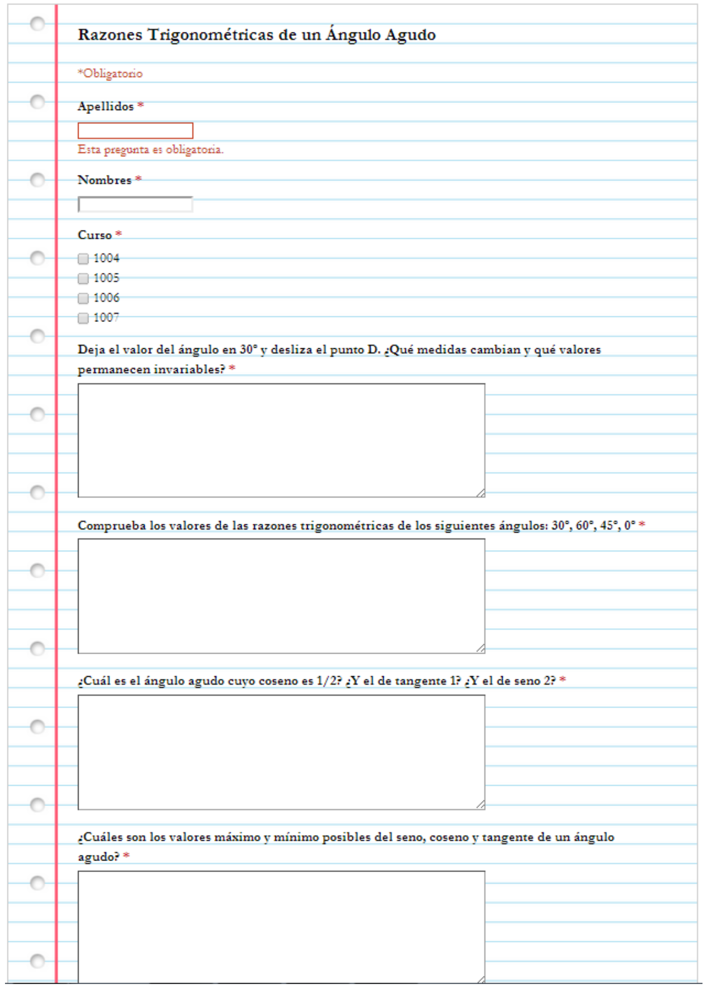
Las preguntas de cada uno de los formularios se describen a continuación[10].

Formulario: Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

1. Deja el valor del ángulo en 30º y desliza el punto D. ¿Qué medidas cambian y qué valores permanecen invariables?
2. Comprueba los valores de las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 30º, 60º, 45º, 0º
3. ¿Cuál es el ángulo agudo cuyo coseno es 1/2? ¿Y el de tangente 1? ¿Y el de seno 2?
4. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo posibles del seno, coseno y tangente de un ángulo agudo?
5. ¿De qué dependen, en un triángulo rectángulo, el valor de las razones entre sus lados?

[10] Junto a la descripción de las preguntas se anexará una captura de pantalla para dar a conocer el formulario creado en Google Docs, sin embargo cabe aclarar que las capturas de pantalla no permiten mostrar todo el contenido del formulario.

Figura 4.6: Captura de pantalla del formulario Razones trigonométricas de un ángulo agudo



Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

*Obligatorio

Apellidos *

Esta pregunta es obligatoria.

Nombres *

Curso *

- 1004
- 1005
- 1006
- 1007

Deja el valor del ángulo en 30° y desliza el punto D. ¿Qué medidas cambian y qué valores permanecen invariables? *

Comprueba los valores de las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 30°, 60°, 45°, 0° *

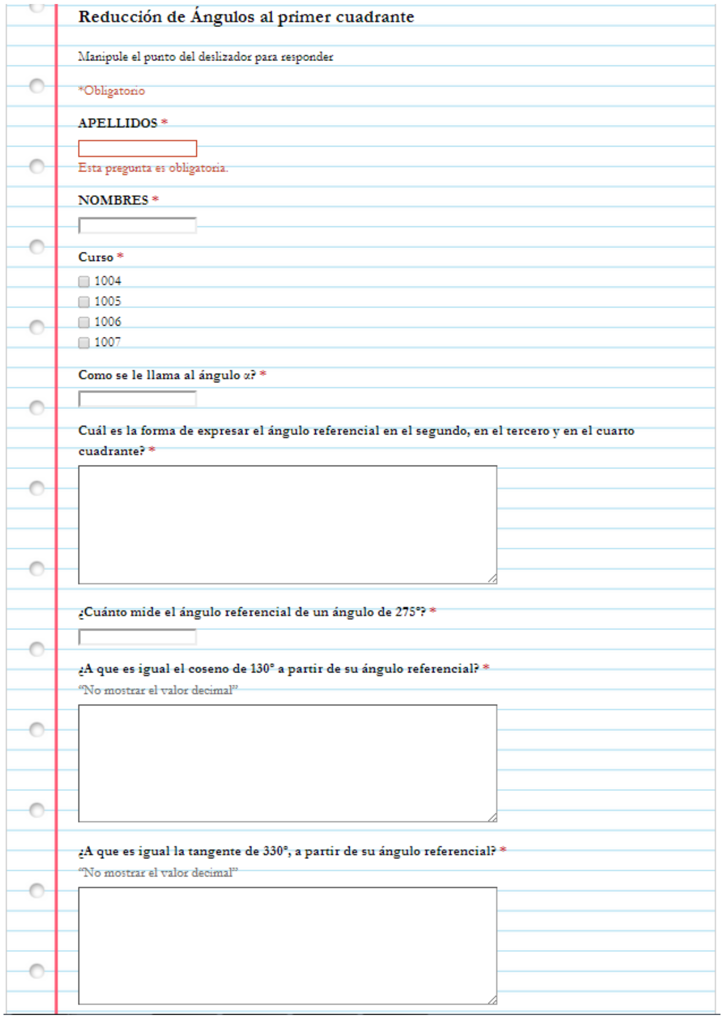
¿Cuál es el ángulo agudo cuyo coseno es 1/2? ¿Y el de tangente 1? ¿Y el de seno 2? *

¿Cuáles son los valores máximo y mínimo posibles del seno, coseno y tangente de un ángulo agudo? *

Formulario: Reducción de Ángulos al primer cuadrante

1. Cómo se le llama al ángulo α?
2. Cuál es la forma de expresar el ángulo referencial en el segundo, en el tercero y en el cuarto cuadrante?
3. ¿Cuánto mide el ángulo referencial de un ángulo de 275º?
4. ¿A qué es igual el coseno de 130º a partir de su ángulo referencial?
5. ¿A qué es igual la tangente de 330º, a partir de su ángulo referencial?
6. Utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables (30º, 45 y 60), ¿Cuál es coseno de 240º?
7. ¿Qué conclusión puede extraer al relacionar las razones trigonométricas de los ángulos θ y α?

Figura 4.7: Captura de pantalla del formulario Reducción de Ángulos al primer cuadrante



Reducción de Ángulos al primer cuadrante

Manipule el punto del deslizador para responder

*Obligatorio

APELLIDOS *

Esta pregunta es obligatoria.

NOMBRES *

Curso *

- 1004
- 1005
- 1006
- 1007

Como se le llama al ángulo α? *

Cuál es la forma de expresar el ángulo referencial en el segundo, en el tercero y en el cuarto cuadrante? *

¿Cuánto mide el ángulo referencial de un ángulo de 275°? *

¿A que es igual el coseno de 130° a partir de su ángulo referencial? *

"No mostrar el valor decimal"

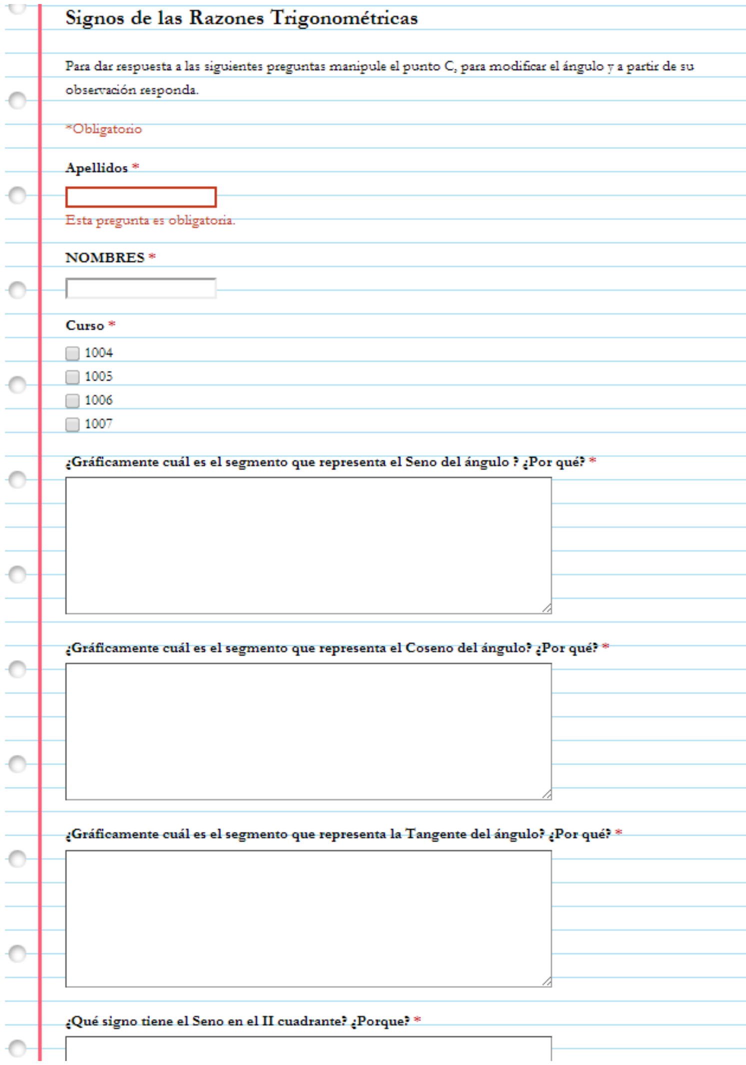
¿A que es igual la tangente de 330°, a partir de su ángulo referencial? *

"No mostrar el valor decimal"

Formulario: Signos de las Razones Trigonométricas

1. ¿Gráficamente cuál es el segmento que representa el Seno del ángulo ? ¿Por qué?
2. ¿Gráficamente cuál es el segmento que representa el Coseno del ángulo? ¿Por qué?
3. ¿Gráficamente cuál es el segmento que representa la Tangente del ángulo? ¿Por qué?
4. ¿Qué signo tiene el Seno en el II cuadrante? ¿Porque?
5. ¿Qué signo tiene el Coseno en el IV cuadrante? ¿Por qué?
6. ¿Qué signo tiene la Tangente en el III cuadrante? ¿Por qué?
7. ¿Existe algún cuadrante en el que todas las razones trigonométricas tengan el mismo signo? Si existe, ¿Cuál es?

Figura 4.8: Captura de pantalla del formulario Signos de las Razones trigonométricas


Signos de las Razones Trigonométricas

Para dar respuesta a las siguientes preguntas manipule el punto C, para modificar el ángulo y a partir de su observación responda.

*Obligatorio

Apellidos *

Esta pregunta es obligatoria.

NOMBRES *

Curso *

- 1004
- 1005
- 1006
- 1007

¿Gráficamente cuál es el segmento que representa el Seno del ángulo ? ¿Por qué? *

¿Gráficamente cuál es el segmento que representa el Coseno del ángulo? ¿Por qué? *

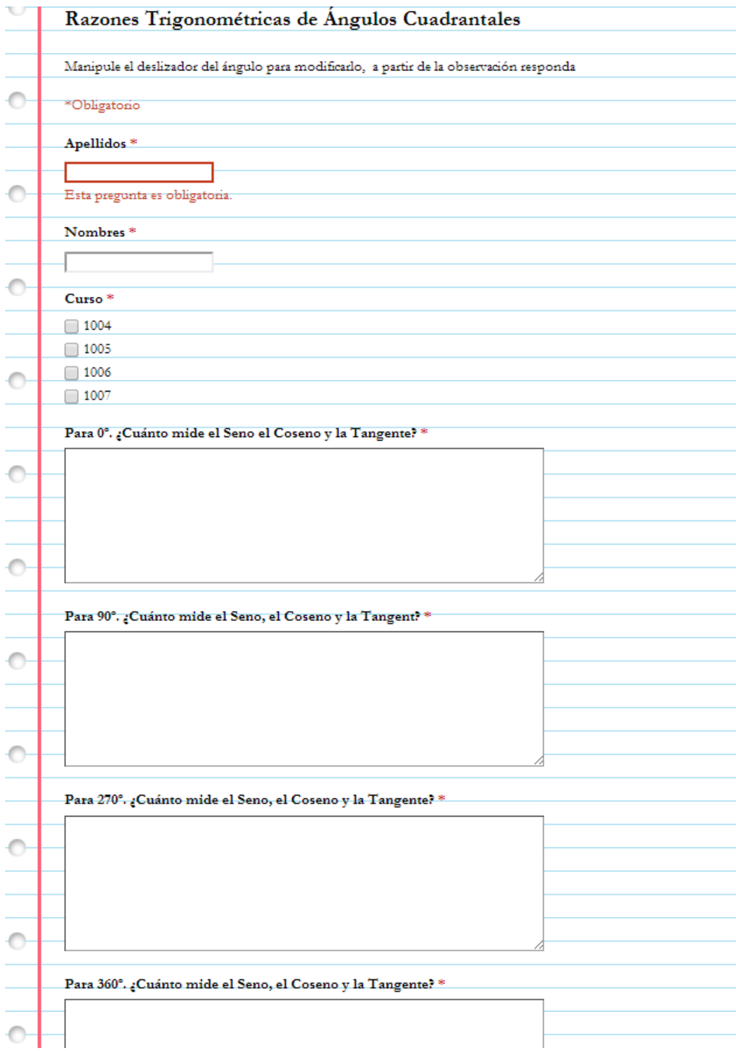
¿Gráficamente cuál es el segmento que representa la Tangente del ángulo? ¿Por qué? *

¿Qué signo tiene el Seno en el II cuadrante? ¿Porque? *

Formulario: Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales

1. Para 0º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?
2. Para 90º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?
3. Para 270º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?
4. Para 360º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?

Figura 4.9: Captura de pantalla del formulario Razones trigonométricas de Ángulos Cuadrantales



Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales

Manipule el deslizador del ángulo para modificarlo, a partir de la observación responda

*Obligatorio

Apellidos *

Esta pregunta es obligatoria.

Nombres *

Curso *

- 1004
- 1005
- 1006
- 1007

Para 0°. ¿Cuánto mide el Seno el Coseno y la Tangente? *

Para 90°. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangent? *

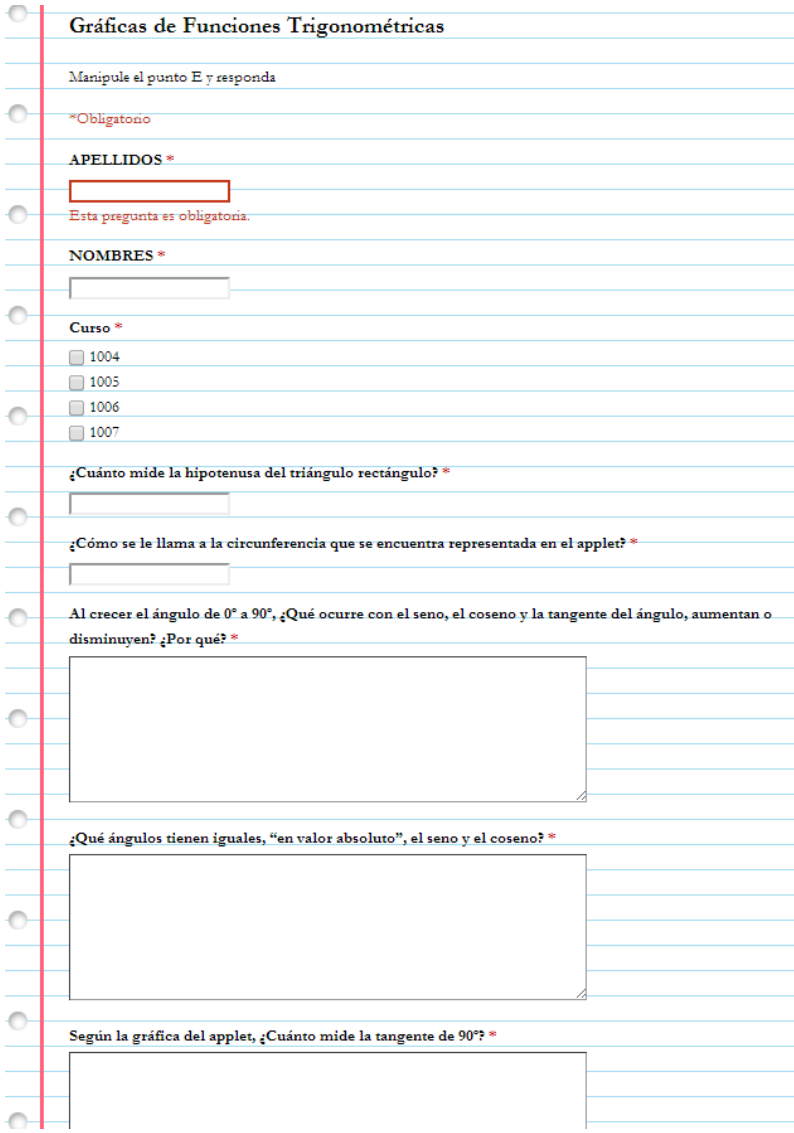
Para 270°. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente? *

Para 360°. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente? *

Formulario: Gráficas de Funciones Trigonométricas

1. ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo?
2. ¿Cómo se le llama a la circunferencia que se encuentra representada en el Applet?
3. Al crecer el ángulo de 0º a 90º, ¿Qué ocurre con el seno, el coseno y la tangente del ángulo, aumentan o disminuyen? ¿Por qué?
4. ¿Qué ángulos tienen iguales, “en valor absoluto”, el seno y el coseno?
5. Según la gráfica del Applet, ¿Cuánto mide la tangente de 90º?
6. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que pueden tomar el Seno y el Coseno de un ángulo?

Figura 4.10: Captura de pantalla del formulario Gráficas de las funciones trigonométricas



Gráficas de Funciones Trigonométricas

Manipule el punto E y responda

*Obligatorio

APELLIDOS *

Esta pregunta es obligatoria.

NOMBRES *

Curso *

- 1004
- 1005
- 1006
- 1007

¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo? *

¿Cómo se le llama a la circunferencia que se encuentra representada en el applet? *

Al crecer el ángulo de 0° a 90°, ¿Qué ocurre con el seno, el coseno y la tangente del ángulo, aumentan o disminuyen? ¿Por qué? *

¿Qué ángulos tienen iguales, "en valor absoluto", el seno y el coseno? *

Según la gráfica del applet, ¿Cuánto mide la tangente de 90°? *

5. ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LA PROPUESTA

5.1 Análisis Descriptivo de los Resultados en los Formularios

Para dar a conocer lo que los estudiantes respondieron en los formularios que se adjuntaron a cada applet, en los que ellos a partir de la observación y análisis dieron muestra de su grado de comprensión de las temáticas, se hará una tabulación de las respuestas que se consideran acertadas y no acertadas por cada uno, con el objetivo de describir si los applets en efecto favorecieron el aprendizaje de los temas planteados en la propuesta[11]. No obstante cabe señalar que ésta descripción no estaba planeada en los objetivos iniciales dentro de lo propuesto en este trabajo porque no se tenía como objetivo medir aprendizajes, por tanto es un valor agregado que también permite determinar el impacto de la propuesta.

Las preguntas planteadas en cada formulario son abiertas, sin embargo, realizar una categorización de las respuestas buscando patrones, observando frecuencias más altas para clasificar desde un punto de vista cognitivo, “desde el aprendizaje”, cambia el enfoque que tuvo la propuesta desde que se planteó, dado que siempre estuvo enfocada en la enseñanza, por eso el título describe que el software es una herramienta para la *enseñanza* de las razones trigonométricas.
Se presenta entonces la descripción de los resultados, justificando cada pregunta, mostrando a partir de tablas y gráficos los porcentajes de las respuestas correctas e incorrectas en cada formulario; para ello se analizará cada respuesta dada por los estudiantes señalando si el estudiante aprueba o no la pregunta[12], teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Se apropia del lenguaje matemático para expresar sus ideas de manera escrita.
- Argumenta adecuadamente sus aportes a partir del uso de conceptos matemáticos.

[11] Se sugiere retomar el apartado del trabajo donde se describen los Applets de la Propuesta (4.4) y la imagen respectiva, así como también abrir el Blog http://trigolppjt2013.blogspot.com donde se encuentran alojados para visualizar el dinamismo de éstos o en su defecto revisar el anexo B.

[12] Se sugiere visualizar el archivo de Excel “Respuestas de los formularios” del CD anexo, que contiene las respuestas de los de los estudiantes consignadas en los formularios, dado que Google Docs permite a exportar a Excel éstos registros.

5.1.1 Análisis descriptivo del Formulario Razones Trigonométricas de un Angulo Agudo

Pregunta 1

Deja el valor del ángulo en 30º y desliza el punto D. ¿Qué medidas cambian y qué valores permanecen invariables?

Justificación: Se pretende que los estudiantes identifiquen que los respectivos valores de las razones trigonométricas permanecen constantes cuando se cambias los valores de los catetos en triángulos semejantes.

Pregunta 2

Comprueba los valores de las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 30º, 60º, 45º, 0º

Justificación: Se pretende que los estudiantes verifiquen los valores de las razones de los ángulos en mención, variando la medida del ángulo agudo

Pregunta 3

¿Cuál es el ángulo agudo cuyo coseno es 1/2? ¿Y el de tangente 1? ¿Y el de seno 2?

Justificación: Se pretende que los estudiantes identifiquen algunos ángulos específicos a partir de valores de razones trigonométricas dados y de otro lado identificar que no existe un ángulo cuyo seno sea 2.

Pregunta 4

¿Cuáles son los valores máximo y mínimo posibles del seno, coseno y tangente de un ángulo agudo?

Justificación: A partir de la modificación de las medidas de los ángulos, identificar los valores máximos y mínimos de cada razón trigonométrica.

Pregunta 5

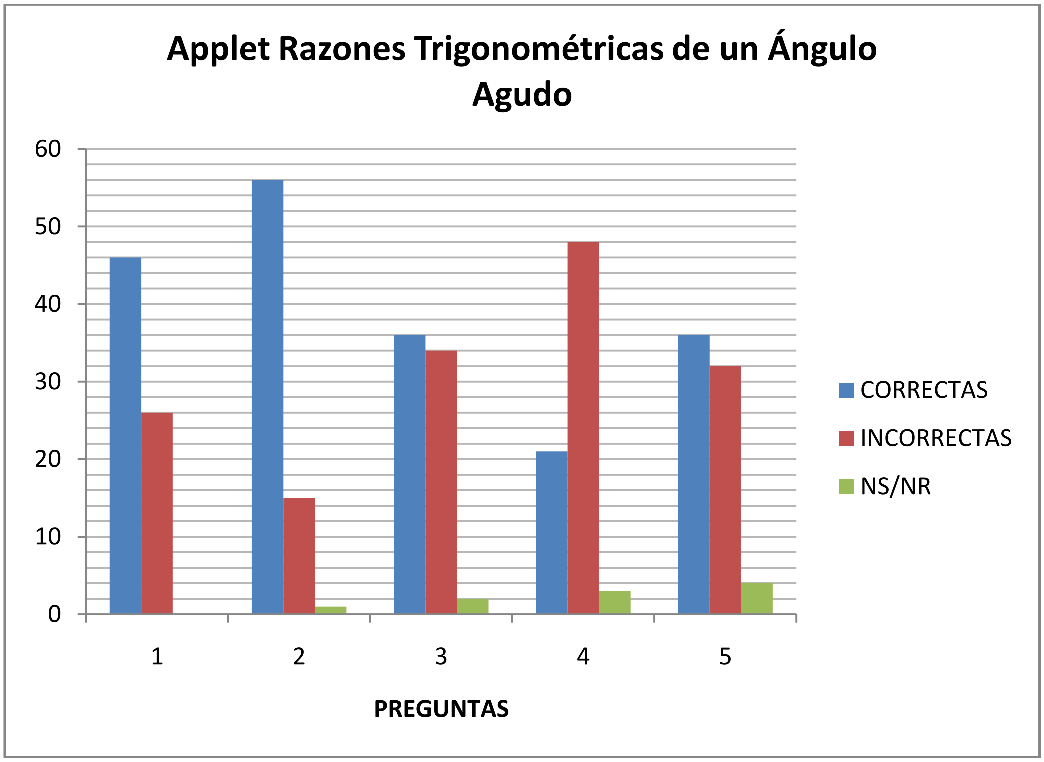
¿De qué dependen, en un triángulo rectángulo, el valor de las razones entre sus lados?

Justificación: Se pretende que los estudiantes argumenten de qué depende el valor de las razones trigonométricas.

Tabla 5.1: Porcentajes de las Respuestas del Applet Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

PREGUNTA	RESPUESTAS	f_i	%
1	CORRECTAS	46	63,9
	INCORRECTAS	26	36,1
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	72	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
2	CORRECTAS	56	77,8
	INCORRECTAS	15	20,8
	No sabe/No Responde	1	1,4
	TOTAL	72	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
3	CORRECTAS	36	50,0
	INCORRECTAS	34	47,2
	No sabe/No Responde	2	2,8
	TOTAL	72	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
4	CORRECTAS	21	29,2
	INCORRECTAS	48	66,7
	No sabe/No Responde	3	4,2
	TOTAL	72	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
5	CORRECTAS	36	50,0
	INCORRECTAS	32	44,4
	No sabe/No Responde	4	5,6
	TOTAL	72	100,0

Figura 5.1: Gráfico respuestas Applet razones trigonométricas de un ángulo agudo



Discusión de Resultados:

- En 4 de las 5 preguntas los porcentajes de respuestas acertadas es mayor a las respuestas correctas.
- La pregunta 4 generó dificultad para los estudiantes porque la mayoría interpretó el máximo y mínimo de la razón acercando el ángulo a 90º para tomar los valores máximos, y acercar el ángulo a 0º para tomar los valores mínimos, sin embargo no identificaron que por ejemplo el coseno cuando el ángulo tiende a 90º se acerca a 0 y ese no se es el valor máximo.
- El ejercicio de conceptualizar fue realizado por la mayoría de los estudiantes independientemente de las respuestas, esto se evidencia porque el porcentaje de los estudiantes que decidieron no responder a determinadas preguntas no supero el 5%.

5.1.2 Análisis Descriptivo del Formulario Reducción de Ángulos al primer cuadrante

Pregunta 1

¿Cómo se le llama al ángulo α?

Justificación: La pregunta está dirigida a que los estudiantes indiquen el nombre del ángulo que permite reducir los ángulos de cualquier magnitud al primer cuadrante, el ángulo referencial.

Pregunta 2

¿Cuál es la forma de expresar el ángulo referencial en el segundo, en el tercero y en el cuarto cuadrante?

Justificación: Se pretende con la pregunta que los estudiantes identifiquen las relaciones que se determinan entre los ángulos mayores a 90º y los ángulos referenciales para cada cuadrante

Pregunta 3

¿Cuánto mide el ángulo referencial de un ángulo de 275º?

Justificación: La pregunta planteada pretende que los estudiantes reconozcan e identifiquen cuál es el ángulo referencial de un ángulo del IV cuadrante con medida dada. Para éste caso deben identificar que el ángulo referencial es de 85º, realizando la operación $360° - 275° = 85°$

Pregunta 4

¿A que es igual el coseno de 130º a partir de su ángulo referencial?

Justificación: Con ésta pregunta se pretende que los estudiantes identifiquen que hay un ángulo referencial para el ángulo de 130°, el cuál es de 50º, y a su vez que el coseno de 130º tiene un valor absoluto igual al coseno de 50º, difieren solo en el signo.

Pregunta 5

¿A que es igual la tangente de 330º, a partir de su ángulo referencial?

Justificación: Con ésta pregunta se pretende un proceso similar a la anterior, con la diferencia que se cambia la razón trigonométrica, y el cuadrante en el que se encuentra el ángulo, por tanto el estudiante debe no sólo identificar las relaciones para reducir al primer cuadrante de una sola razón trigonométrica sino de las tres (Seno, Coseno y Tangente).

Pregunta 6

Utilizando los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables (30º, 45 y 60), ¿Cuál es coseno de 240º?

Justificación: Con ésta pregunta se trata de que el estudiante nuevamente identifique el ángulo referencial y la relación correspondiente entre el ángulo dado y el referencial, pero con la diferencia de no solo identifique el valor que visualiza en el applet, sino que reconozca los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables que se abordaron en clase y que ellos consignaron en una tabla en sus diarios de clase.

Pregunta 7

¿Qué conclusión puede extraer al relacionar las razones trigonométricas de los ángulos θ y α?

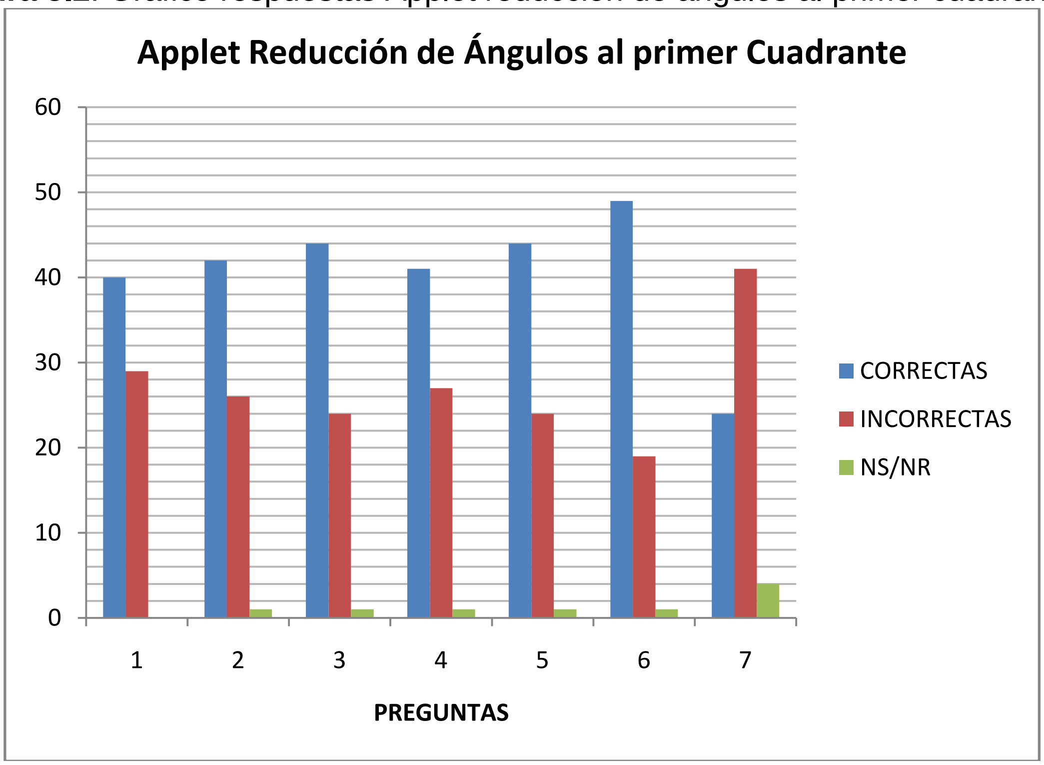
Justificación: Con ésta pregunta se quiere que el estudiante reconozca que todo ángulo mayor a 90º está relacionado con un ángulo menor llamado ángulo referencial y que las razones trigonométricas de los dos ángulos (el de mayor magnitud y el referencial) son iguales en valor absoluto y solo difieren en el signo.

Tabla 5.2: Porcentajes de las Respuestas del Applet Reducción de Ángulos al primer cuadrante.

PREGUNTA	RESPUESTAS	f_i	%
1	CORRECTAS	40	58,0
	INCORRECTAS	29	42,0
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	69	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
2	CORRECTAS	42	60,9
	INCORRECTAS	26	37,7
	No sabe/No Responde	1	1,4
	TOTAL	69	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
3	CORRECTAS	44	63,8
	INCORRECTAS	24	34,8
	No sabe/No Responde	1	1,4
	TOTAL	69	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
4	CORRECTAS	41	59,4
	INCORRECTAS	27	39,1
	No sabe/No Responde	1	1,4
	TOTAL	69	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
5	CORRECTAS	44	63,8
	INCORRECTAS	24	34,8
	No sabe/No Responde	1	1,4
	TOTAL	69	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
6	CORRECTAS	49	71,0
	INCORRECTAS	19	27,5
	No sabe/No Responde	1	1,4
	TOTAL	69	100,0

PREGUNTA	RESPUESTAS	f_i	%
7	CORRECTAS	24	34,8
	INCORRECTAS	41	59,4
	No sabe/No Responde	4	5,8
	TOTAL	69	100,0

Figura 5.2: Gráfico respuestas Applet reducción de ángulos al primer cuadrante



Discusión de Resultados:

- En 6 de las 7 preguntas el porcentaje de respuestas consideradas acertadas es mayor al de las respuestas incorrectas.
- Para éste formulario hubo 3 estudiantes que no dieron respuesta, al respecto, cabe aclarar que este trabajo fue extraclase y en ese sentido pudo haber afectado que en los dos cursos es notorio en unos pocos estudiantes malos hábitos de estudio.
- Los applets si permitieron visualizar los cambios pertinentes de las relaciones en cada cuadrante, ya que la mayoría de los estudiantes diieron a conocer en sus respuestas las relaciones que hay que tener en cuenta para reducir ángulos al primer cuadrante.
- Se hizo notoria una dificultad en varias respuestas de los estudiantes, en lo que concierne a los signos, puesto que los estudiantes para reducir al primer cuadrante deben tener claro el comportamiento de los signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes, y a pesar de que la mayoría

relacionó la razón trigonométrica del ángulo de mayor magnitud con la razón trigonométrica del ángulo referencial, algunos estudiantes obviaron el signos en varias ocasiones. Sin embargo, el applet que sigue tiene como objetivo que el estudiante reconozca y comprenda el comportamiento de las razones trigonométricas al respecto de los signos.

- En la última pregunta, se evidencia que sólo el 35% contesto de manera acertada, no obstante, era la pregunta más abierta de todas, en el sentido de que se solicitaba que concluyeran las relaciones que dan para reducir al primer cuadrante, requería de que los estudiantes dieran muestra de su competencia argumentativa.

5.1.3 Análisis Descriptivo del Formulario Signos de las Razones Trigonométricas

Pregunta 1
¿Gráficamente cuál es el segmento que representa el Seno del ángulo? ¿Por qué?
Justificación: Las razones trigonométricas tienen distintas formas de representarse, en ese sentido la pregunta pretende que el estudiante comprenda cual es el segmento que representa el seno cuando el triángulo rectángulo está sobre la circunferencia unitaria.

Pregunta 2
¿Gráficamente cuál es el segmento que representa el Coseno del ángulo? ¿Por qué?
Justificación: Con ésta pregunta de nuevo el contexto es gráfico con la diferencia de que indaga por la razón trigonométrica coseno.

Pregunta 3
¿Gráficamente cuál es el segmento que representa la Tangente del ángulo? ¿Por qué?
Justificación: Ésta pregunta se diferencia de las anteriores, en que se pretende que el estudiante reconozca gráficamente cuál es el segmento que representa la tangente, se propuso las tres preguntas, respecto a cada razón trigonométrica, porque con el último applet de la propuesta se tiene como objetivo construir las gráficas de las funciones trigonométricas desde el contexto gráfico, para lo cual se requiere que el estudiante reconozca gráficamente cada razón trigonométrica.
Pregunta 4
¿Qué signo tiene el Seno en el II cuadrante? ¿Por qué?
Pregunta 5

¿Qué signo tiene el Coseno en el IV cuadrante? ¿Por qué?

Pregunta 6

¿Qué signo tiene la Tangente en el III cuadrante? ¿Por qué?

Justificación: Con las preguntas 4, 5 y 6 se pretende que los estudiantes reconozcan que signo tiene el seno, el coseno y la tangente en particular en un cuadrante, para lo cual tienen como referencia el plano cartesiano para hacer la respectiva correspondencia entre el semieje del plano y el segmento que representa la razón trigonométrica.

Pregunta 7

¿Existe algún cuadrante en el que todas las razones trigonométricas tengan el mismo signo? Si existe, ¿Cuál es?

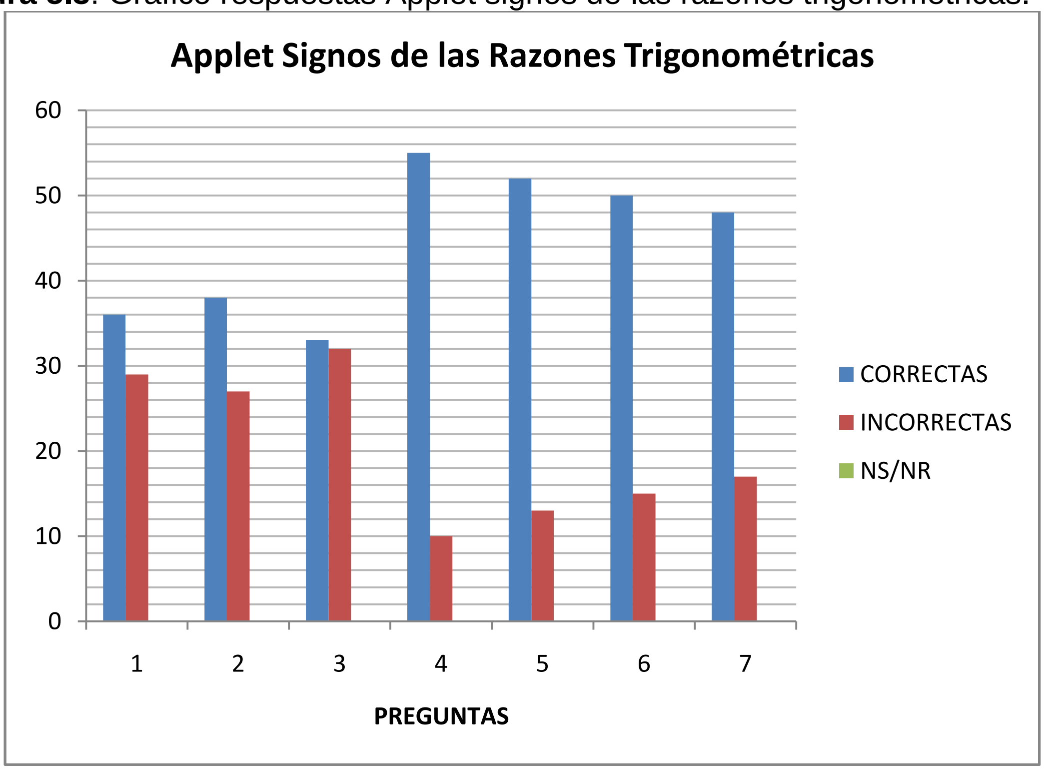
Justificación: En esta pregunta se pretende que el estudiante identifique que en el primer cuadrante todas las razones trigonométricas son positivas, y para esto deben visualizar la manera como quedan ubicados los segmentos que representa cada razón trigonométrica.

Tabla 5.3: Porcentajes de las Respuestas del Applet Signos de las Razones Trigonométricas

PREGUNTA	RESPUESTAS	f_i	%
1	CORRECTAS	36	55,4
	INCORRECTAS	29	44,6
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	65	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
2	CORRECTAS	38	58,5
	INCORRECTAS	27	41,5
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	65	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
3	CORRECTAS	33	50,8
	INCORRECTAS	32	49,2
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	65	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
4	CORRECTAS	55	84,6
	INCORRECTAS	10	15,4
	No sabe/No Responde		0,0

	TOTAL	65	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**fi**	**%**
5	CORRECTAS	52	80,0
	INCORRECTAS	13	20,0
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	65	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**fi**	**%**
6	CORRECTAS	50	76,9
	INCORRECTAS	15	23,1
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	65	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**fi**	**%**
7	CORRECTAS	48	73,8
	INCORRECTAS	17	26,2
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	65	100,0

Figura 5.3: Gráfico respuestas Applet signos de las razones trigonométricas.



Discusión de Resultados:

- En todas las preguntas de éste applet los porcentajes de las respuestas consideradas correctas siempre fueron más altos comparados con las respuestas incorrectas, lo que demuestra que los estudiantes sí visualizaron la variación de los signos en los cuadrantes del plano cartesiano, pero esto se evidencia también porque era necesario que los estudiantes visualizaran como es el seno, el coseno y la tangente de manera gráfica, (como línea trigonométrica)

- El objetivo principal del applet se logró, en cuanto a que se buscaba que los estudiantes identificaran los signos de las razones trigonométricas en algunos cuadrantes en particular, y clara muestra de ello son los porcentajes de las preguntas 4 a la 7, donde los porcentajes de respuestas correctas son en efecto más altos que las respuestas incorrectas.
- En las primeras tres preguntas se evidenció dificultad por parte de algunos estudiantes porque no les fue fácil referirse a un segmento de manera verbal o simbólica, puesto que algunos estudiantes daba respuestas como “el Seno es la línea azul”, cuando claramente cada uno de los segmentos estaba nombrado con la notación correcta, letras mayúsculas.
- En este applet, 65 de los 72 estudiantes hicieron el proceso de contestar las preguntas del formulario, sin dejar ninguna sin contestar, sin embargo 7 de los 72 estudiantes, no realizó el proceso.

5.1.4 Análisis descriptivo Formulario Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales

Pregunta 1

Para 0º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?

Pregunta 2

Para 90º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?

Pregunta 3

Para 270º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?

Pregunta 4

Para 360º. ¿Cuánto mide el Seno, el Coseno y la Tangente?

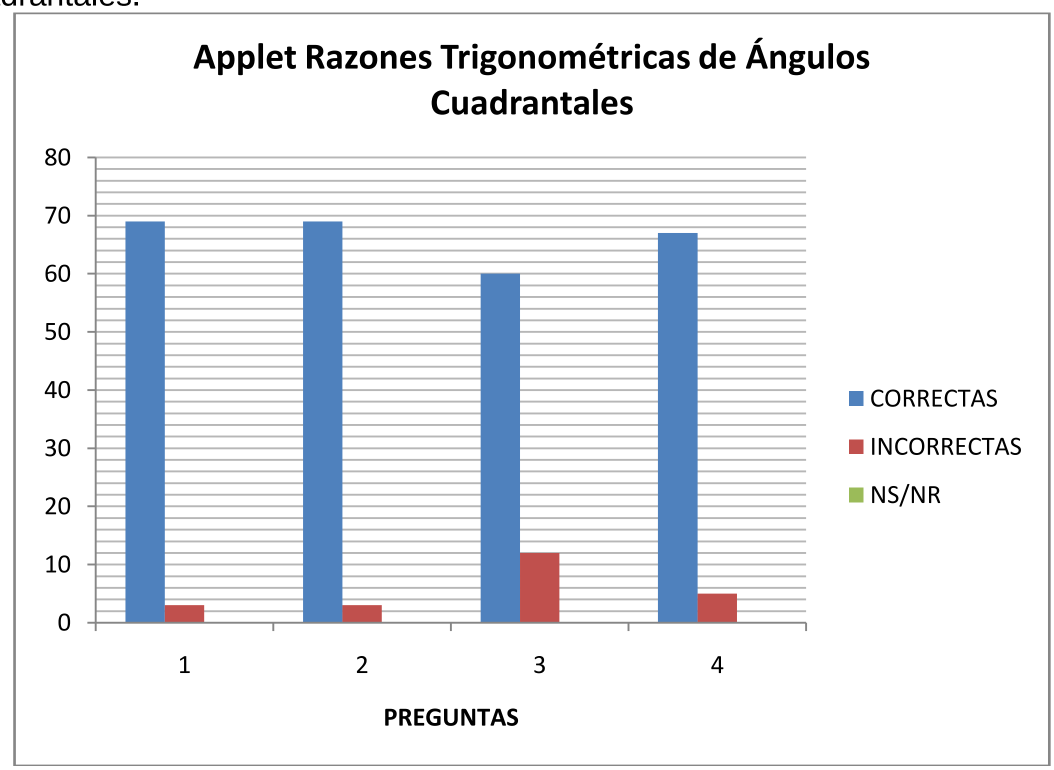
Justificación: Para las cuatro preguntas planteadas en éste Applet se requiere que el estudiante realice una observación directa manipulando el ángulo en posición normal que se encuentra en el Applet acercar la medida del ángulo hacia las medidas indicadas para deducir cual es el valor correspondiente a dichas razones trigonométricas.

Tabla 5.4: Porcentajes de las Respuestas del Applet Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales

PREGUNTA	RESPUESTAS	f_i	%
1	CORRECTAS	69	95,8
	INCORRECTAS	3	4,2
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	72	100,0

PREGUNTA	RESPUESTAS	f_i	%
2	CORRECTAS	69	95,8
	INCORRECTAS	3	4,2
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	72	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
3	CORRECTAS	60	83,3
	INCORRECTAS	12	16,7
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	72	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	f_i	**%**
4	CORRECTAS	67	93,1
	INCORRECTAS	5	6,9
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	72	100,0

Figura 5.4: Gráfico respuestas Applet razones trigonométricas de ángulos cuadrantales.



Discusión de Resultados:

- El porcentaje de las respuestas correctas para cada pregunta fue cercano al 90%, lo que permite concluir que la mayoría de los estudiantes reconoció los valores de los ángulos cuadrantales a partir de la manipulación del ángulo en posición normal del Applet

- La totalidad de la población dio respuesta a las preguntas del formulario, es decir 72 de 72.
- De los 72 estudiantes que respondieron los formularios, ninguno dejo preguntas por contestar.
- De las tres razones trigonométricas la que generó más dificultad en los estudiantes fue la tangente, esto porque la mayoría de los estudiantes se limitó a indicar el valor representado en el applet, con respecto a la tangente de 90º y 270º, para los cuales la tangente es indefinida.

5.1.5 Análisis Descriptivo Formulario Gráficas de Funciones Trigonométricas

Pregunta 1

¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo?

Justificación: Ésta pregunta pretende que los estudiantes identifiquen que la hipotenusa mide 1, esto porque coincide con ser uno de los radios de la circunferencia.

Pregunta 2

¿Cómo se le llama a la circunferencia que se encuentra representada en el Applet?

Justificación: Para esta pregunta la cual está relacionada con la anterior, se pretende que los estudiantes identifiquen que la circunferencia representada en dicho applet y en los demás, es la circunferencia unitaria, dado que su radio mide 1.

Pregunta 3

Al crecer el ángulo de 0º a 90º, ¿Qué ocurre con el seno, el coseno y la tangente del ángulo, aumentan o disminuyen? ¿Por qué?

Justificación: Ésta pregunta es de las más importantes del las planteadas en el formulario, porque está referida a que los estudiantes identifiquen la variación que tiene cada función a medida que cambia el valor del ángulo, por ello se plantea en términos de aumentar o disminuir.

Pregunta 4

¿Qué ángulos tienen iguales, “en valor absoluto”, el seno y el coseno?

Justificación: La pregunta pretende que los estudiantes identifiquen que hay unos ángulos en particular en donde el seno y coseno coinciden con tener el mismo valor, estos ángulos son 45º, 135º, 225º y 315º. No obstante está relacionada con lo planteado en el applet reducción al primer cuadrante por la relación que tienen los ángulos referenciales con los de magnitud mayor a 90º.

Pregunta 5

Según la gráfica del Applet, ¿Cuánto mide la tangente de 90º?

Justificación: Con esta pregunta se pretende que el estudiante identifique que la tangente de 90º es indefinida desde la gráfica.

Pregunta 6

¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que pueden tomar el Seno y el Coseno de un ángulo?

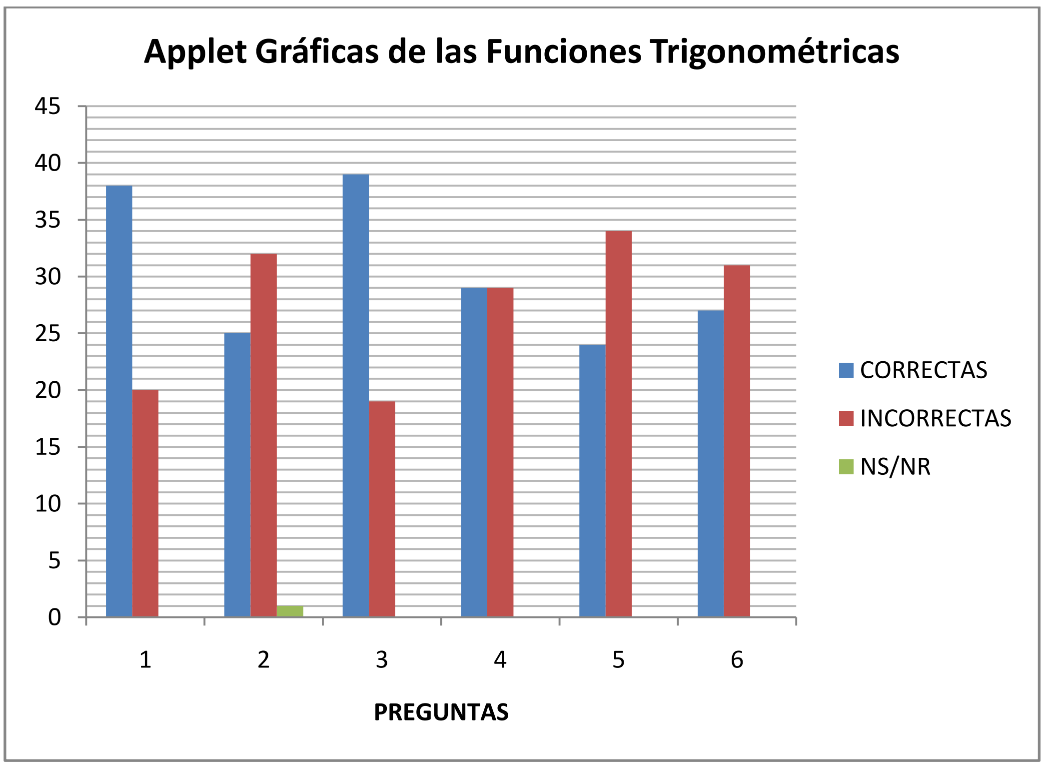
Justificación: Con esta pregunta se pretende que los estudiantes identifiquen los valores máximo y mínimo que tienen la función seno y coseno, es decir, su rango. Esto a partir de la observación de la gráfica que se va construyendo en el plano cartesiano a partir de la manipulación del ángulo.

Tabla 5.5: Porcentajes de las Respuestas del Applet Gráficas de las Funciones Trigonométricas

PREGUNTA	RESPUESTAS	f_i	%
1	CORRECTAS	38	65,5
	INCORRECTAS	20	34,5
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	58	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
2	CORRECTAS	25	43,1
	INCORRECTAS	32	55,2
	No sabe/No Responde	1	1,7
	TOTAL	58	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
3	CORRECTAS	39	67,2
	INCORRECTAS	19	32,8
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	58	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**f_i**	**%**
4	CORRECTAS	29	50,0
	INCORRECTAS	29	50,0
	No sabe/No Responde	1	1,7
	TOTAL	59	101,7

PREGUNTA	RESPUESTAS	fi	%
5	CORRECTAS	24	41,4
	INCORRECTAS	34	58,6
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	58	100,0
PREGUNTA	**RESPUESTAS**	**fi**	**%**
6	CORRECTAS	27	46,6
	INCORRECTAS	31	53,4
	No sabe/No Responde		0,0
	TOTAL	58	100,0

Figura 5.5: Gráfico respuestas Applet gráficas de las razones trigonométricas



Discusión de Resultados:

- Éste Applet comparado con los demás se hace notorio a partir de los porcentajes que fue el de más dificultad para los estudiantes, solo 2 de las 6 preguntas arrojaron mayor porcentaje de respuestas correctas que incorrectas.
- La pregunta de mayor dificultad fue la 5, en donde se planteó como pregunta cuánto mide la tangente de 90º, esto se presentó debido a que el applet no permitió hacer que la medida del ángulo fuera exactamente 90º, por tanto

muchos estudiantes consideraron como respuesta el valor que les mostraba el applet sin tener en cuenta que realmente el valor correspondía por ejemplo con la tangente de 90,2º o 90,13º, un valor próximo pero no igual a 90º.

- Otra pregunta que generó un poco de dificultad fue la que indicaba el término valor absoluto, porque algunos estudiantes no están familiarizados con dicho término.
- Cabe señalar como fortaleza que este applet realmente sí favorece el aprendizaje para graficar las funciones trigonométricas, porque posteriormente a este trabajo los estudiantes presentaron como trabajo de la clase la construcción en hojas milimetradas de las gráficas de las funciones trigonométricas pero utilizando la estrategia gráfica a partir de la circunferencia unitaria e identificando las líneas trigonométricas. Este procedimiento de graficar permite una mayor aprehensión del conocimiento en particular porque cada punto de la gráfica que corresponde con una imagen de la función se hace corresponder con la magnitud de la función trigonométrica vista como línea trigonométrica en la circunferencia unitaria.

5.2 Resultados de las Encuestas de Satisfacción

La encuesta de satisfacción se aplicó en físico (papel) de manera censal, es decir, a la totalidad de la población (72 estudiantes de grado décimo), de la Institución Educativa Distrital Leonardo Posada Pedraza, posteriormente a los dos momentos o fases de la propuesta. En la primera fase el docente dio uso a los applets en las orientaciones y/o explicaciones de clase y en la segunda fase se dio uso a los applet por parte de los estudiantes en trabajo extra clase con éstos alojados en el blog creado para la clase de Trigonometría.

Luego de aplicar las encuestas se procede a realizar un análisis descriptivo, para el cual se está considerando un tipo de variable en toda la encuesta, “Variable Cualitativa Ordinal”, la cual es la que toma como valores, categorías pero con la distinción de que estas categorías permiten ordenarse.

La encuesta se formuló con 10 preguntas (ver anexo C), las cuales se cerraron con las siguientes categorías

___En Desacuerdo
___Parcialmente De Acuerdo
___De acuerdo
___Totalmente de Acuerdo
___No Sabe/No Responde

Los parámetros estadísticos para realizar el análisis descriptivo a considerar son la moda y la mediana, junto a estos parámetros, se mostrará también las respectivas tablas de frecuencia y la representación de la información en gráficos.
Cabe señalar que la mediana se extrae cuantitativamente, a pesar de que los datos no son cuantitativos, las variables cualitativas ordinales posibilitan tener como referente dicho parámetro porque se le puede asignar valor numérico a las categorías de respuesta, sin que necesariamente sea de conocimiento del encuestado. La mediana se hará corresponder con la categoría ordinal dependiendo del valor numérico resultante.
De otra parte las preguntas que resultaron con respuestas de categoría No Sabe/ No responde, que según (Varela et al. (s.f.)), se le consideran datos ausentes o perdidos, y aunque generan disminución en la muestra o en la población, lo mejor es evitar siempre que no se den. Sin embargo, la mayoría de los investigadores y algunos paquetes estadísticos, lo que hacen es eliminar todos los casos que tengan un valor perdido (llamados “Missing”) en alguna de las variables seleccionadas. Por tanto las tablas que resumen la información recolectada de la encuesta tendrán algunas, la columna “Porcentaje Valido” en la cual se omiten los datos de la categoría “No sabe/No responde”

Tabla 5.6: Valores numéricos asignados a las categorías ordinales de respuesta

RESPUESTA	Valor Asignado
En desacuerdo	1
Parcialmente de Acuerdo	2
De acuerdo	3
Totalmente de Acuerdo	4
No sabe No Responde	-

PREGUNTA 1

¿La información publicada en cada Aplicativo (Applet) fue lo suficientemente clara para resolver las distintas preguntas planteadas?

Con la pregunta se pretende indagar en los estudiantes si el conjunto de blog, applets y formularios contenía información clara.

Tabla 5.7: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 1, en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	f_i	%	% Acum.
1	EN DESACUERDO	2	2,8	2,8
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	19	26,4	29,2
3	DE ACUERDO	36	50,0	79,2
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	15	20,8	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	0	0	0
TOTAL		72	100	

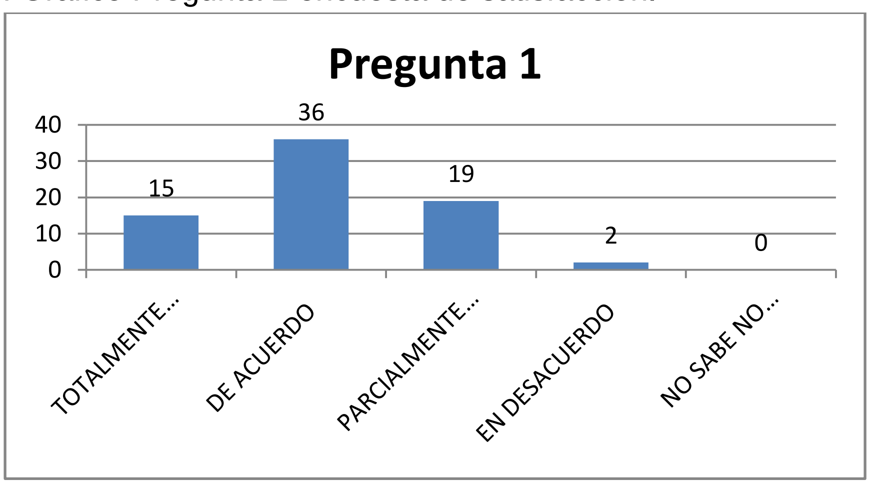
$$Mo = DEACUERDO$$

$$Me = 4$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría DE ACUERDO

Es de notar que en los porcentajes solo aproximadamente el 3% de los estudiantes no está de acuerdo con que la información publicada en cada Applet era clara, y a su vez aproximadamente el 71% de los estudiantes está de acuerdo o totalmente de acuerdo con que la información presentada en cada applet si era clara.

Figura 5.6: Gráfico Pregunta 1 encuesta de satisfacción.



PREGUNTA 2

¿Las temáticas abordadas en cada applet corresponden con las temáticas de Trigonometría planteadas por el Docente?

Con la pregunta se pretende indagar en los estudiantes si los temas abordados por ellos en los applets desde el blog, en efecto son los mismos que el docente trabajó en sus orientaciones y explicaciones de clase.

Tabla 5.8: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 2, en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	f_i	%	% Acum.
1	EN DESACUERDO	0	0,0	0,0
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	8	11,1	11,1
3	DE ACUERDO	27	37,5	48,6
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	37	51,4	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	0	0	
TOTAL		72	100	

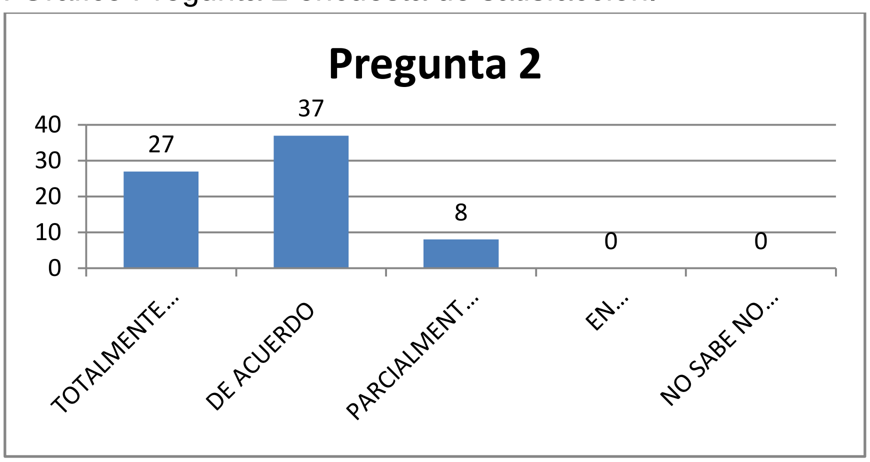
$$Mo = TOTALMENTE\ DE\ ACUERDO$$

$$Me = 4$$

Para ésta pregunta la Mediana corresponde a la categoría TOTALMENTE DE ACUERDO

Es de notar que en ésta pregunta el 100% de los estudiantes está por lo menos Parcialmente de Acuerdo, con que los temas trabajados por ellos con los applets y los formularios, si corresponden con los que planteo el docente en su propuesta, y en específico el 37% están totalmente de Acuerdo con lo planteado en la pregunta.

Figura 5.7: Gráfico Pregunta 2 encuesta de satisfacción.



PREGUNTA 3

¿Considera que los Applets son interactivos y permiten visualizar el dinamismo de los objetos geométricos con sus respectivas medidas?

Con la pregunta se pretende indagar a los estudiantes si en efecto lograron visualizar el dinamismo de las construcciones realizadas, es decir, si realmente hicieron el ejercicio de manipular dichos objetos cambiando las medidas en la mayoría de los casos de los ángulos planteados en cada applet.

Tabla 5.9: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 3, en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	f_i	%	% Acum.
1	EN DESACUERDO	2	2,8	2,8
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	11	15,3	18,1
3	DE ACUERDO	38	52,8	70,9
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	21	29,2	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	0	0	
TOTAL		72	100	

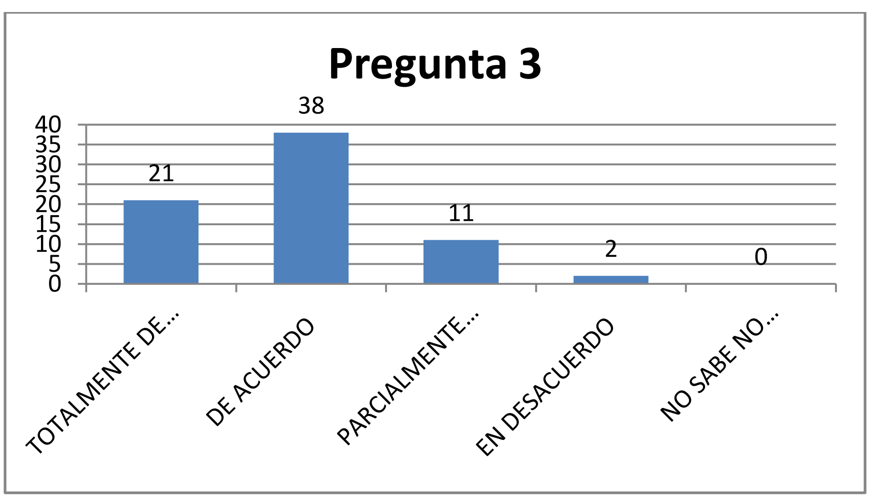
$$Mo = DEACUERDO$$

$$Me = 3$$

Para ésta pregunta la Mediana corresponde a la categoría DE ACUERDO

Es de notar que en ésta pregunta aproximadamente solo el 3% de los estudiantes no está de acuerdo en que las construcciones eran dinámicas pero el 97% restante que representa a 70 de 72 estudiantes están por lo menos Parcialmente de acuerdo en que lo representado en los applets no eran representaciones gráficas estáticas, es decir, podría decirse que sí manipularon los elementos que permitían modificar las medidas de los ángulos y segmentos, para observar y responder las preguntas de los formularios.

Figura 5.8: Gráfico Pregunta 3 encuesta de satisfacción.



PREGUNTA 4

¿Los Applets permitieron visualizar la variación de los signos de las razones trigonométricas en los cuadrantes del plano cartesiano?

Con ésta pregunta se pretende indagar si los estudiantes observaron el cambio de signo de las razones trigonométricas a medida que cambiaban la medida del ángulo en posición normal que se tomaba como referente en el applet para responder las preguntas planteadas en el formulario.

Tabla 5.10: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 4, en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	f_i	%	% Acum.
1	EN DESACUERDO	0	0,0	0,0
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	9	12,5	12,5
3	DE ACUERDO	40	55,6	68,1
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	23	31,9	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	0	0	
TOTAL		72	100	

$$Mo = DEACUERDO$$

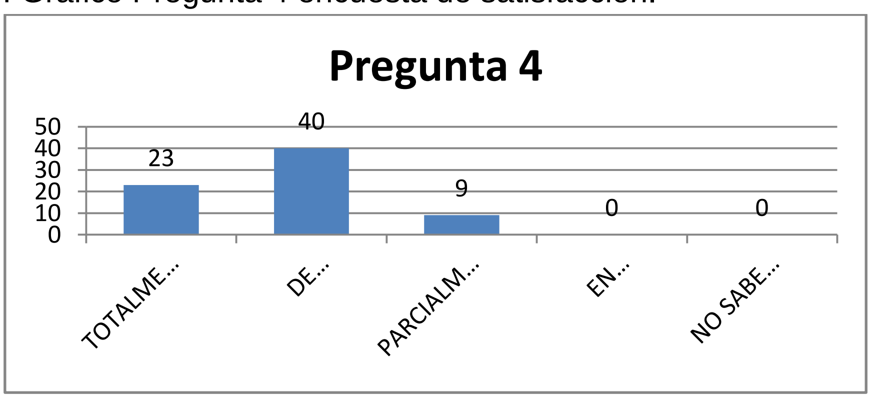
$$Me = 3$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría DE ACUERDO

Es de notar que en esta pregunta ningún estudiante está en Desacuerdo con que se observó en el applet el cambio de signo de las razones trigonométricas a partir de los cuadrantes. El 100% está por lo menos De acuerdo con ese hecho planteado en la pregunta.

Para este applet los estudiantes debían identificar el seno, el coseno y la tangente del ángulo desde un contexto netamente gráfico, ya que no se anexó representación simbólica alguna al applet, esto porque previamente los estudiantes habían recibido unas orientaciones dadas por el docente para interpretar las razones trigonométricas en el estudio de la circunferencia unitaria desde el contexto gráfico

Figura 5.9: Gráfico Pregunta 4 encuesta de satisfacción.



PREGUNTA 5

¿Las representaciones geométricas realizadas por el Docente en las clases de Trigonometría deber ser realizadas por medio de software para ser proyectadas con ayudas audiovisuales?

Con esta pregunta se pretende determinar si los estudiantes consideran pertinente que se le de uso a las herramientas tecnológicas, como el blog, los applets, el proyector y demás software que facilitan el proceso de hacer representaciones desde un contexto gráfico.

Tabla 5.11: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 5, en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	f_i	%	% Válido	% Acum.
1	EN DESACUERDO	4	5,6	6,2	6,2
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	10	13,9	15,4	21,6
3	DE ACUERDO	33	45,8	50,8	72,4
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	18	25,0	27,7	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	7	10	Missing	
TOTAL		72	100	100	

$$Mo = DEACUERDO$$

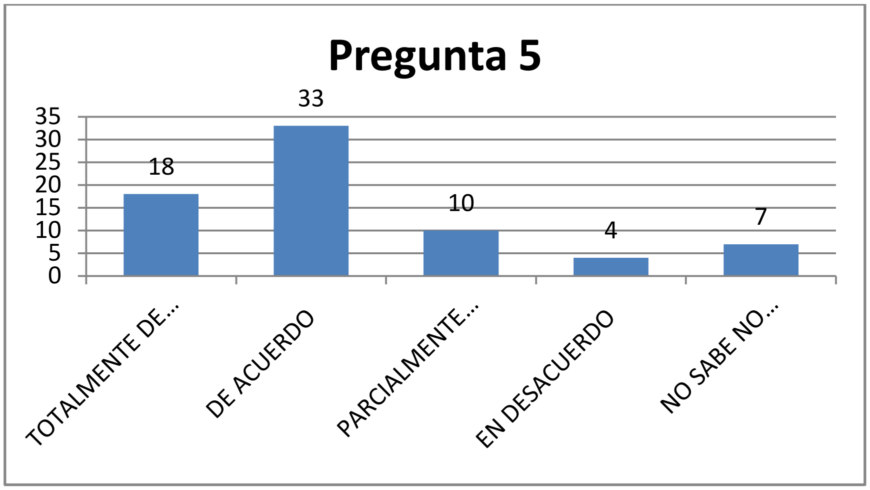
$$Me = 3$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría DE ACUERDO.

Es de señalar en esta pregunta que aproximadamente el 94% está por lo menos parcialmente de acuerdo en que los docentes en las clases de trigonometría se deben apoyar en herramientas tecnológicas como las mencionadas en la propuesta.

Esta pregunta es la que arrojó más resultados en la categoría No Sabe/No Responde, considerando que se redactó de manera general, partiendo de la hipótesis de que se debió especificar a qué herramientas tecnológicas se refería la pregunta, y también a qué tipo de ayudas audiovisuales. Esto afectó como tal los parámetros, porque al omitir éstos siete datos, las conclusiones descritas hacen referencia a una muestra de 65 estudiantes.

Figura 5.10: Gráfico Pregunta 5 encuesta de satisfacción



PREGUNTA 6

¿Las representaciones geométricas realizadas por el Docente en las clases de Trigonometría deber ser realizadas solo con ayuda del marcador y el tablero?

Con esta pregunta se pretende determinar si los estudiantes consideran pertinente que las representaciones gráficas para las explicaciones se realicen de manera tradicional, refiriéndose de esa manera al marcador y tablero o pizarra.

Tabla 5.12: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 6 en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	fi	%	% Acum.
1	EN DESACUERDO	34	47,2	47,2
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	24	33,3	80,5
3	DE ACUERDO	10	13,9	94,4
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	4	5,6	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	0	0	
TOTAL		72	100	

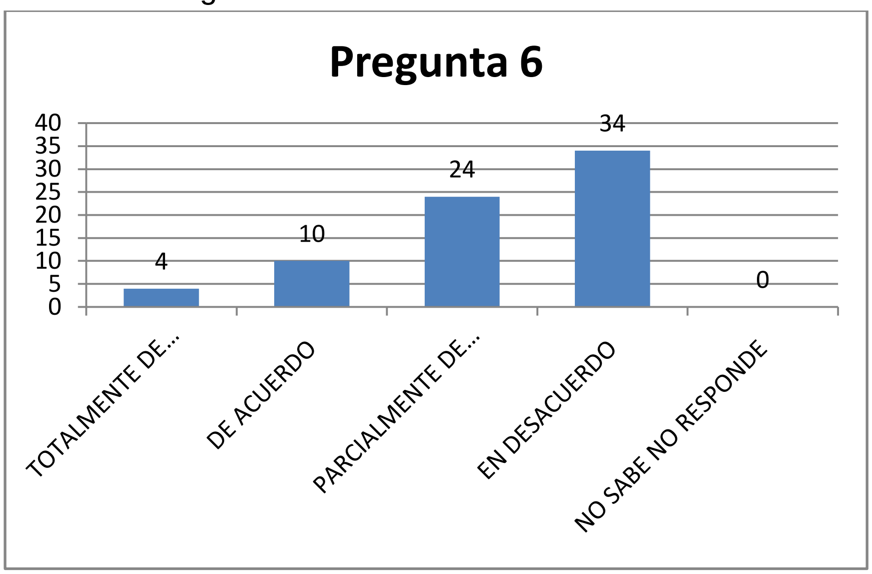
$$Mo = ENDESACUERDO$$

$$Me = 2$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría PARCIALMENTE DE ACUERDO

Es de señalar que a diferencia de las otras 9 preguntas, ésta fue la única que arroja una moda de categoría En desacuerdo, esto porque la pregunta es un tanto excluyente con la anterior, porque se pretendió indagar si realmente prefieren las ayudas tecnológicas o lo tradicional para las representaciones gráficas que hacen los docentes en las explicaciones. En efecto los estudiantes prefieren que los docentes se apoyen en herramientas tecnológicas porque la mayoría está en Desacuerdo en usar lo tradicional, esto sin demeritar que esa es la manera como muchos de nosotros hemos aprendido, viendo representaciones estáticas y abstrayendo ideas a partir de éstas. De hecho 20% de los estudiantes a los que se les aplicó la propuesta están por lo menos de acuerdo en que las representaciones sí deben ser solo con marcador y pizarra. Sin embargo estos estudiantes vienen de una escolaridad en la que ninguno de sus docentes de matemáticas ni de las otras áreas se ha apoyado en herramientas tecnológicas para generar buenos ambientes de aprendizaje.

Figura 5.11: Gráfico Pregunta 6 encuesta de satisfacción



PREGUNTA 7

¿Los Applets facilitaron el aprendizaje de los temas abordados?

La pregunta descrita pretende determinar si se hizo posible un mejor aprendizaje con el uso de éstas herramientas.

Tabla 5.13: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 7 en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	fi	%	% Acum.
1	EN DESACUERDO	2	2,8	2,8
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	15	20,8	23,6
3	DE ACUERDO	30	41,7	65,3
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	25	34,7	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	0	0	
TOTAL		72	100	

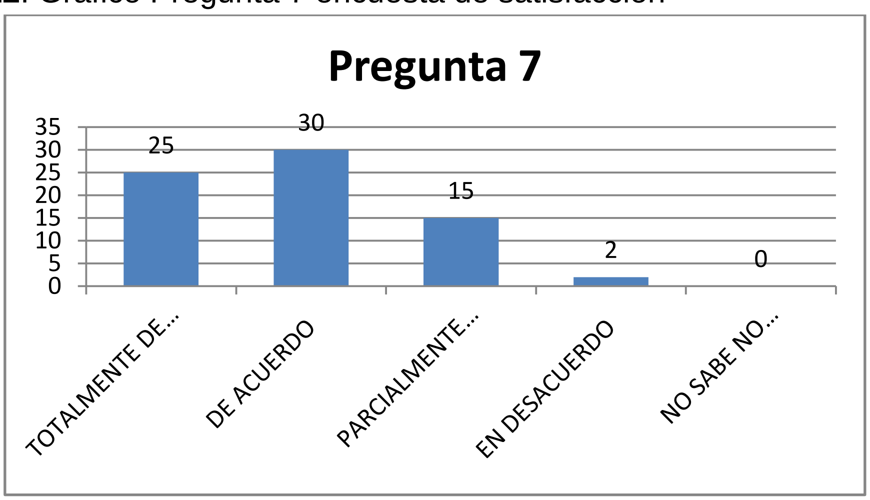
$$Mo = DEACUERDO$$

$$Me = 3$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría DE ACUERDO.

Es de señalar que esta es una de las preguntas más significativas para el propósito de la encuesta, el cual es determinar si se cumplió el objetivo de la presente propuesta. Y en efecto el 97% aproximadamente está por lo menos Parcialmente de Acuerdo con que los Applets sí facilitaron el aprendizaje para ellos en los dos momentos de la propuesta. Son 55 estudiantes de los 72 que consideran está De acuerdo o Totalmente de acuerdo en que sí se hizo posible el aprendizaje de los temas de Trigonometría abordados. Por tanto es bien significativo que los estudiantes coincidan en que sí sirve en el proceso enseñanza-aprendizaje el uso de éstas herramientas tecnológicas.

Figura 5.12: Gráfico Pregunta 7 encuesta de satisfacción



PREGUNTA 8

¿El Docente hizo uso de los Applets para las explicaciones en el aula de clase?

Se pretende con esta pregunta mostrar que sí hubo una primera fase o primer momento de la propuesta didáctica, en la que se usaron los applets para las orientaciones y/o explicaciones dadas en clase por parte del docente.

Tabla 5.14: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 8 en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	fi	%	% Acum.
1	EN DESACUERDO	0	0,0	0,0
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	6	8,3	8,3
3	DE ACUERDO	35	48,6	56,9
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	31	43,1	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	0	0	
TOTAL		72	100	

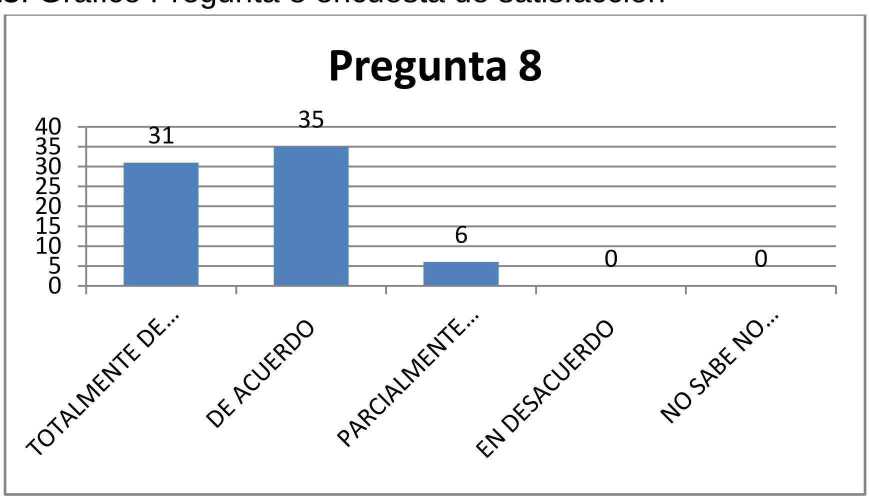
$$Mo = \ DE\ ACUERDO$$

$$Me = \ 3$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría DE ACUERDO.

Es de notar en esta pregunta que aproximadamente el 92% está De Acuerdo o Totalmente de acuerdo con que previamente al uso de los applets en el blog, el docente proyectó dichos applets para las explicaciones en clase.

Figura 5.13: Gráfico Pregunta 8 encuesta de satisfacción



PREGUNTA 9

¿El uso de los Applets en clase de Matemáticas fue un proceso satisfactorio y beneficioso tanto para el Docente como para usted?

Con la pregunta se pretende validar los dos momentos de la propuesta. El primer momento de la propuesta, que señala que los Applets fueron una herramienta para la enseñanza de los temas y el segundo momento en donde se convirtió en una herramienta para el aprendizaje de los estudiantes, para dar respuesta a las preguntas de índole conceptual planteadas en los formularios.

Tabla 5.15: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 9 en la categorías de la Encuesta de Satisfacción.

Valor Asig.	RESPUESTA	fi	%	% Válido	% Acum.
1	EN DESACUERDO	1	1,4	1,4	1,4
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	9	12,5	12,7	14,1
3	DE ACUERDO	33	45,8	46,5	60,6
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	28	38,9	39,4	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	1	1	Missing	
TOTAL		72	100	100	

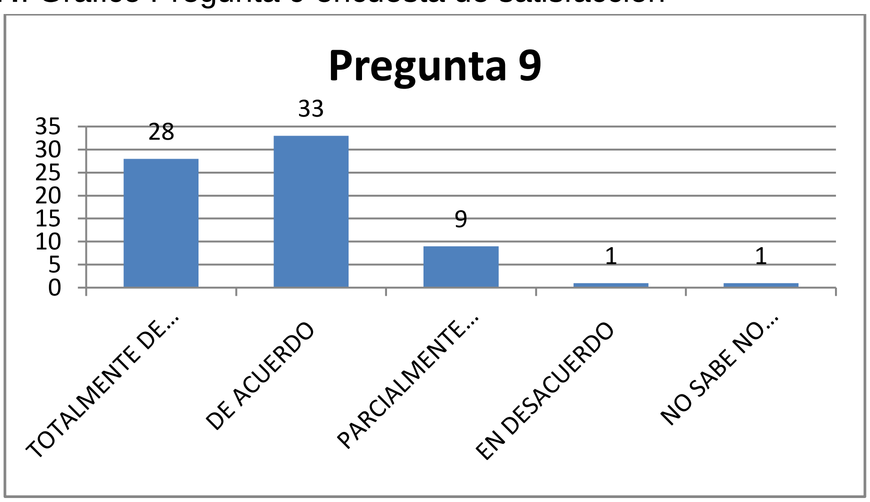
$$Mo = \ DE\ ACUERDO$$

$$Me = \ 3$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría DE ACUERDO.

Es de notar en esta pregunta que aproximadamente el 98,6% está por lo menos Parcialmente De Acuerdo con que el proceso de Enseñanza – Aprendizaje fue satisfactorio con las herramientas tecnológicas usadas. No obstante, en ésta pregunta nuevamente la población se disminuye en un individuo, que dió respuesta de categoría No Sabe/No responde y se considera dato ausente lo que hace que se generen la columna de porcentajes válidos, pero estos variaron poco con respecto a los iniciales.

Figura 5.14: Gráfico Pregunta 9 encuesta de satisfacción



PREGUNTA 10

¿Le gustaría que en sus clases de Matemáticas futuras los docentes se apoyen de herramientas como las usadas (Applets -Blogs) para favorecer la comprensión de los temas?

Con la pregunta se pretende indagar la disposición de los estudiantes para que los futuros docentes que tengan en la clase de matemáticas utilicen herramientas tecnológicas.

Tabla 5.16: Porcentajes de Respuesta de la Pregunta 10 en la categorías de la Encuesta de Satisfacción

Valor Asig.	RESPUESTA	fi	%	% Válido	% Acum.
1	EN DESACUERDO	3	4,2	4,3	4,3
2	PARCIALMENTE DE ACUERDO	8	11,1	11,4	15,7
3	DE ACUERDO	24	33,3	34,3	50,0
4	TOTALMENTE DE ACUERDO	35	48,6	50,0	100,0
-	NO SABE NO RESPONDE	2	3	Missing	
TOTAL		72	100	100	

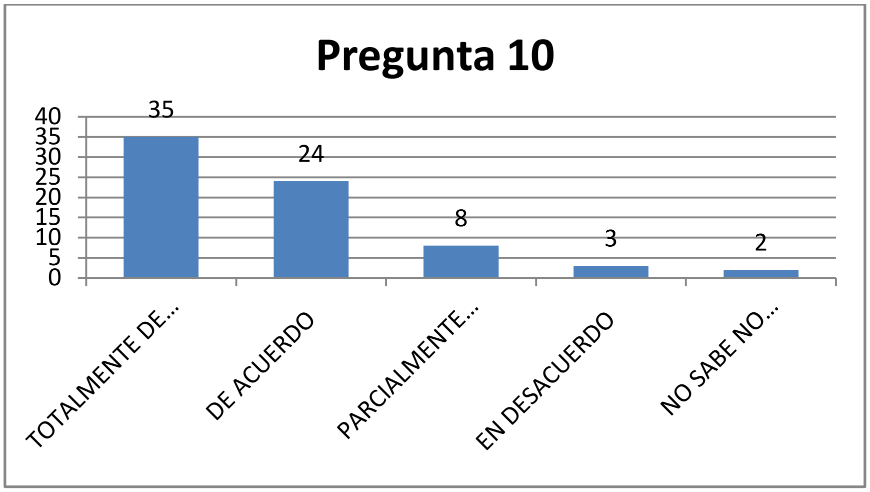
$$Mo = \ TOTALMENTE\ DE\ ACUERDO$$
$$Me = \ 3$$

Para esta pregunta la Mediana corresponde a la categoría TOTALMENTE DE ACUERDO

Es de señalar en esta pregunta que aproximadamente el 95% de los estudiantes tiene disposición para que sus docentes de matemáticas en procesos futuros utilicen dentro de sus estrategias didácticas herramientas computacionales. Sin embargo esta pregunta también arrojó resultados con categoría No Sabe/No responde, lo que hizo que se redujera en dos individuos la población y generar porcentajes válidos a partir de 70 datos y no de 72.

Esto valida de cierta forma la propuesta didáctica, porque realmente es en los estudiantes en quienes se ve reflejado un proceso satisfactorio, de no ser así, ellos optarían por considerar recibir clases de manera tradicional.

Figura 5.15: Gráfico Pregunta 10 encuesta de satisfacción



6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

1. La propuesta didáctica que se puso en práctica facilitó tanto el proceso de enseñanza al docente, como de aprendizaje a los estudiantes, en donde la observación directa de los Applets y la manipulación de los elementos de las construcciones realizadas con el software, permitieron abstraer ideas y conceptos regularmente incomprensibles con representaciones estáticas.
2. La implementación de la propuesta desde el diseño de los applets, el blog y los formularios, el uso por parte de los estudiantes y el análisis de los resultados y la encuesta de satisfacción son muestra evidente de una alternativa innovadora para la enseñanza de la Trigonometría
3. La estrategia didáctica puesta en práctica, con la ayuda del software se convierte en un agente motivador en los estudiantes para adquirir conocimiento, puesto que los estudiantes actualmente viven una era digital, en donde lo tradicional no es precisamente lo que prefieren en sus clases, todo lo que sea innovador para ellos y que les permita vivir nuevas experiencias de aprendizaje los motiva de hecho contribuyendo a mejorar hábitos de estudio.
4. El análisis descriptivo de las respuestas de los formularios, permite afirmar que los estudiantes realizaron un correcto aprendizaje de las razones trigonométricas, apoyado en GeoGebra como herramienta para la enseñanza, dado que los porcentajes de respuestas acertadas en prácticamente todas las preguntas fueron mucho más altos que los de las respuestas consideradas incorrectas.
5. La mediación del software en el proceso de enseñanza en efecto facilitó el intercambio entre los sistemas de representación como pasar de lo gráfico-analítico a lo numérico-simbólico, de manera que las representaciones tradicionales “las estáticas” se enriquecen con ésta herramienta.
6. Se evidenció en la encuesta de satisfacción que los estudiantes consideran que la puesta en práctica de la propuesta fue satisfactorio tanto para ellos como para el docente, lo que reafirma el impacto que generó en el proceso de enseñanza aprendizaje.

6.2 RECOMENDACIONES

Teniendo como referente los resultados de la propuesta se recomienda:

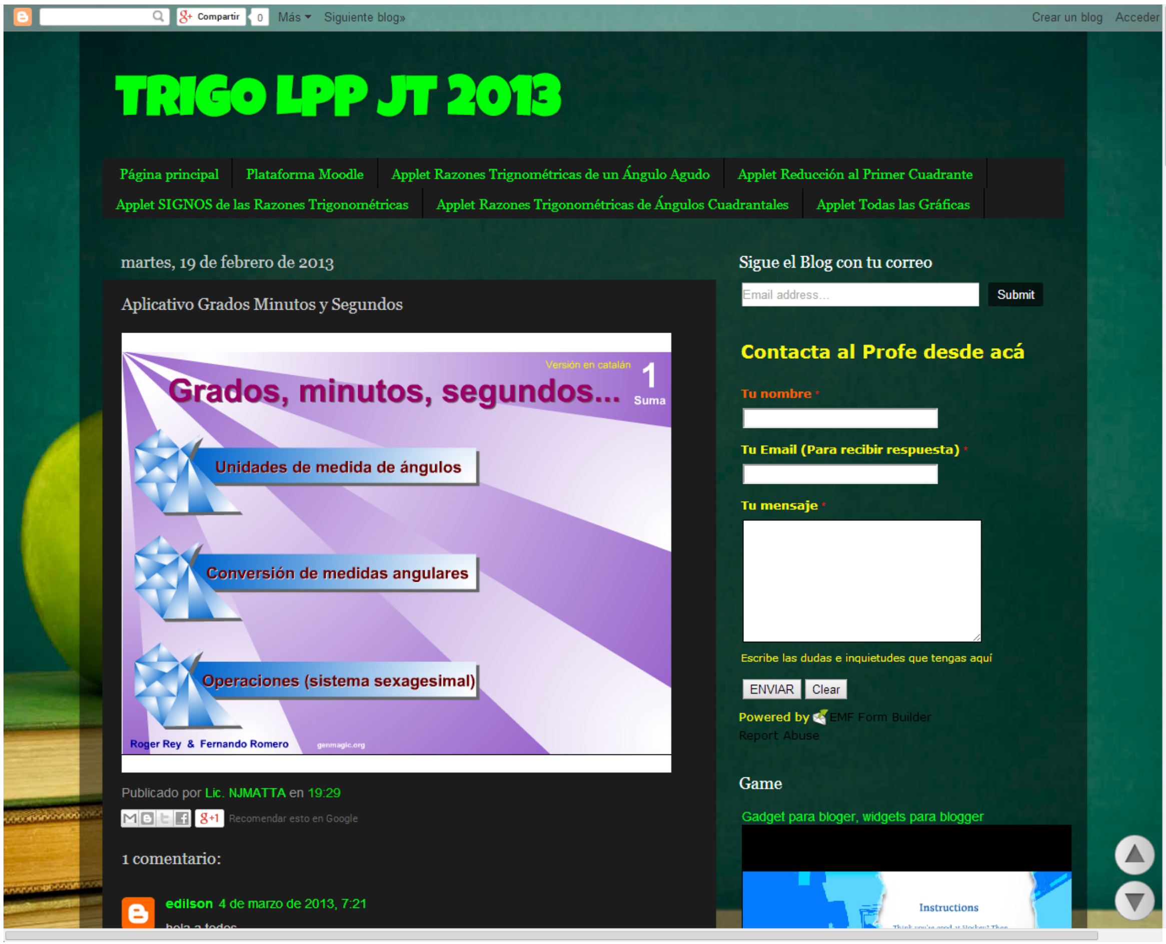
1. Dar uso al software GeoGebra, sabiendo que en nuestro país no es tan conocido, porque sí genera facilidad al momento de realizar una explicación y favorece el aprendizaje de los estudiantes, y también porque es versátil en relación con los contenidos, es decir, no solo permite abordar temas de trigonometría, realmente se puede trabajar con él una gran variedad de temas de matemáticas.
2. Tener en cuenta que los resultados de la propuesta pueden servir para profundizar más en el aprendizaje de la Trigonometría, porque en las respuestas de los formularios hubo hallazgos que se pueden considerar tanto fortalezas como debilidades de los estudiantes, que podrían relacionarse con teoría a nivel cognitivo de la Trigonometría.
3. Invitar a la comunidad de docentes de nuestro país y a nivel internacional indagar más sobre las potencialidades que tiene el software GeoGebra, esto porque en la actualidad hay comunidades de docentes que organizan simposios, ponencias, en las que hay una clara muestra de que es una gran herramienta.

4. Visitar el servidor que tiene la plataforma GeoGebra en el que muchos docentes y amantes de éste software han compartido sus construcciones para hacerlas disponibles en la red, la dirección del servidor es :http://www.geogebratube.org/

A. ANEXO: Evidencias del Blog TRIGOLPPJT

Dirección: http://trigolppjt2013.blogspot.com/

Blog con Aplicativos Flash

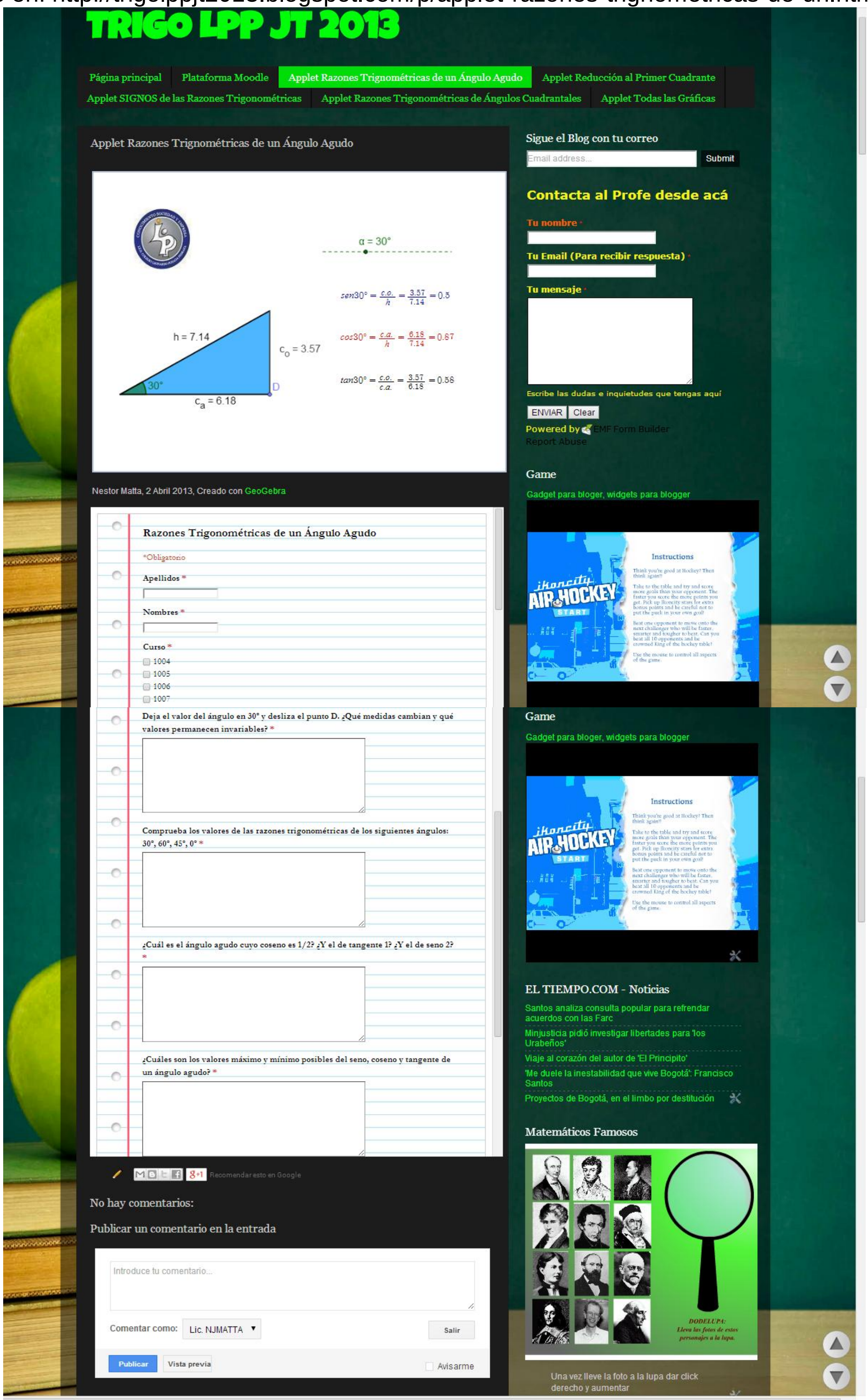


Blog con Documentos Alojados

No,	ESTUDIANTE	MATEMATICAS					X
		P1	P2	P3	P4	PM	DEF
1	ARBOLEDA GUERRA JHOSTIN	6,7	6,9	6,6	5,0	3,8	6,3
2	AYALA AVILA ANGIE SOFIA	4,3	4,1			15,6	4,2
3	BARAHONA ORTIZ ALISSON DAYANNA	4,1	5,4	6,4	6,3	8,1	5,6
4	BOTIVA LOPEZ LINA XIOMARA	5,5	5,6	7,1	5,8	5,9	6,0
5	CASALLAS SARMIENTO YESENIA	4,0	4,5	7,4	6,0	8,0	5,5
6	CIPAGAUTA MORON RUBEN DARIO	5,5	6,8	6,9	6,6	4,7	6,5
7	CRUZ RUEDA SANTIAGO	6,0	6,9	6,8	6,5	4,3	6,6
8	DIAZ BOLIVAR DILSON DANIEL	5,6	6,5	7,7	5,2	4,2	6,2
9	DIAZ HERRERA PAOLA ANDREA	4,2	5,9	6,8	7,1	7,1	6,0
10	DOMINGUEZ CHOCONTA MARIA HELENA	9,3	8,6	9,8	9,3	0,0	9,2
11	ERAZO LOPEZ ALDIVEY YOEL	5,2	6,3	6,9	6,4	5,6	6,2
12	ESPINOSA TAPIA ANA MARIA	7,1	7,0	6,9	6,6	2,9	6,9
13	FULA HEREDIA GENDY LORENA	4,5	6,7	7,3	6,6	5,5	6,3
14	GARCIA CUERO ANGIE JULIETH	7,9	7,5	7,5	6,0	1,1	7,2
15	GUZMAN BERNAL LINA MARIA	7,3	7,0	9,4	7,0	0,3	7,7
16	HOYOS MOTTA PAOLA ALEJANDRA	7,2	7,8	8,7	7,1	0,3	7,7
17	LAMPREA ROCHA JENNIFER ANGELICA	5,1	6,3	8,1	6,6	4,5	6,5
18	LEON RODRIGUEZ NICOL DAYHANNY	4,2	5,7	6,4	5,6	7,8	5,5
19	LOPEZ OCAMPO JUAN SEBASTIAN	5,3	4,4	6,7	4,4	7,6	5,2
20	MADERA ORTIZ ANGELA MARCELA	6,9	7,6	8,1	8,9	1,4	7,9
21	MUÑOZ BEJARANO GERALDINE	6,7	5,8	7,7	8,1	3,8	7,1
22	OSORIO SALAMANCA DARWIN DANIEL	4,7	5,2	5,6	5,4	8,5	5,2
23	PABON NAVARRO NURIS TATIANA	7,2	7,8	9,0	7,4	0,1	7,8
24	PACHECO BOLIVAR IVAN ESTIVEN	5,5	4,6	6,9	7,4	7,1	6,1
25	PEÑA GIL HAROLD DAVID	5,7	6,7	8,1	6,9	3,6	6,8
26	PITA PIÑARTE JUAN DAVID	4,3	5,3	6,0	5,9	8,5	5,4
27	RAMIREZ GUERRERO ANGIEE LORENA	6,2	6,7	6,1	6,1	5,1	6,3
28	RENDON HERRERA PAULA ANDREA	6,3	6,2	7,4	7,5	4,2	6,8
29	REYES IBAÑEZ CARLOS ANDRES	7,2	7,8	8,4	8,2	0,6	7,9
30	RINCON MARTINEZ JHON SEBASTIAN	6,5	5,6	7,3	6,4	4,6	6,4
31	RIVERA REYES JOHN ALEXANDER	6,2	6,5	7,8	8,3	3,5	7,2
32	RODRIGUEZ PINZON BRAYAN STEVEN	6,4	7,6	8,4	6,0	1,6	7,1
33	ROJAS TRUJILLO DANIELA	5,0	4,6	7,0	6,1	7,4	5,7
34	ROMERO VANEGAS WENDY LORAYNE	4,8	4,3	4,7	6,8	10,2	5,2
35	SARMIENTO TORRES YESICA LICETH	6,2	6,4	7,8	8,1	3,6	7,1
36	TRASLAVIÑA CAMACHO ANDERSON HERNANDO	4,6	4,8	5,7	3,0	8,9	4,5

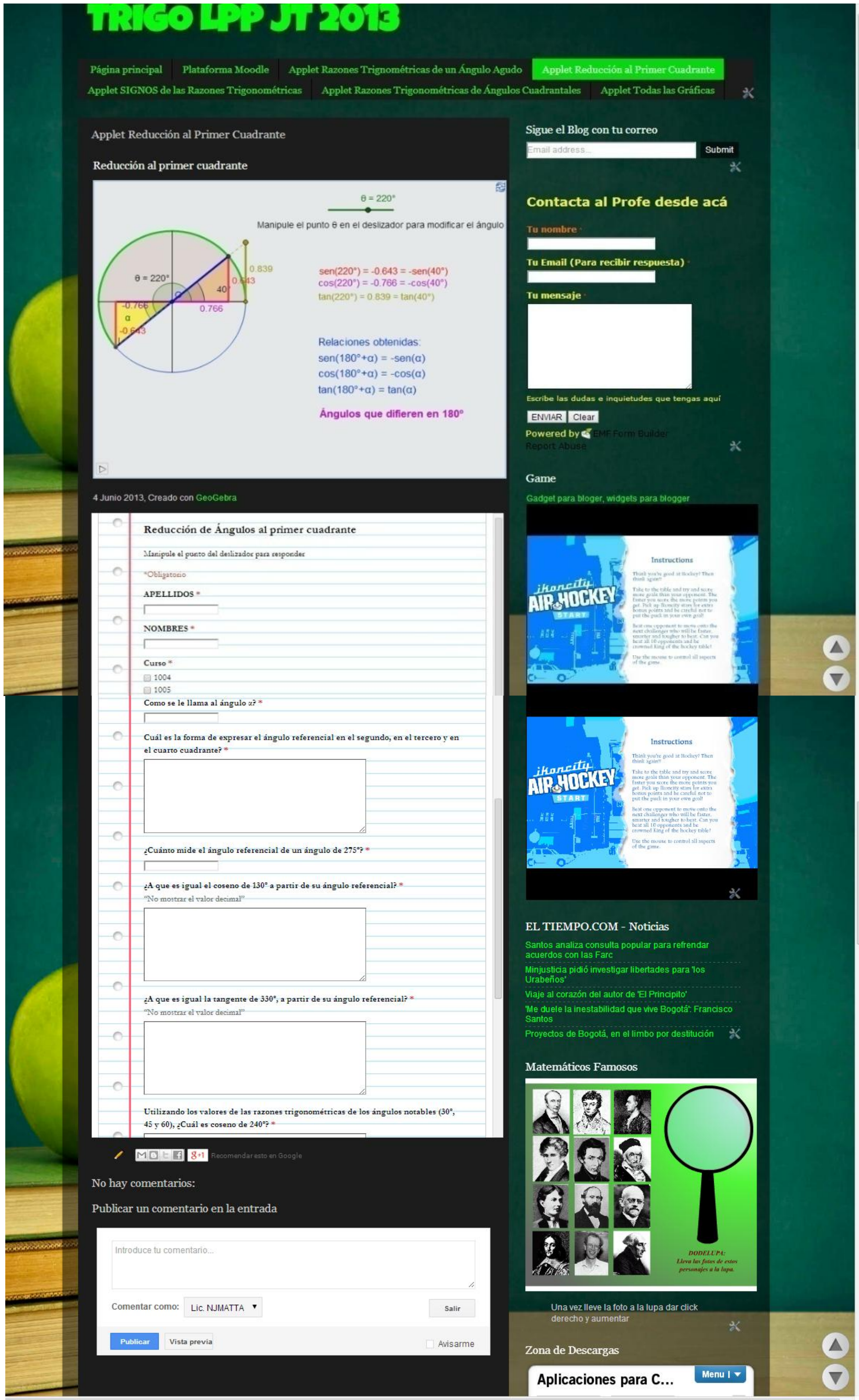
B. ANEXO: Applets Incrustados en Blog con sus Formularios

Applet Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo con su Formulario
Accesible en: http://trigolppjt2013.blogspot.com/p/applet-razones-trignometricas-de-un.html

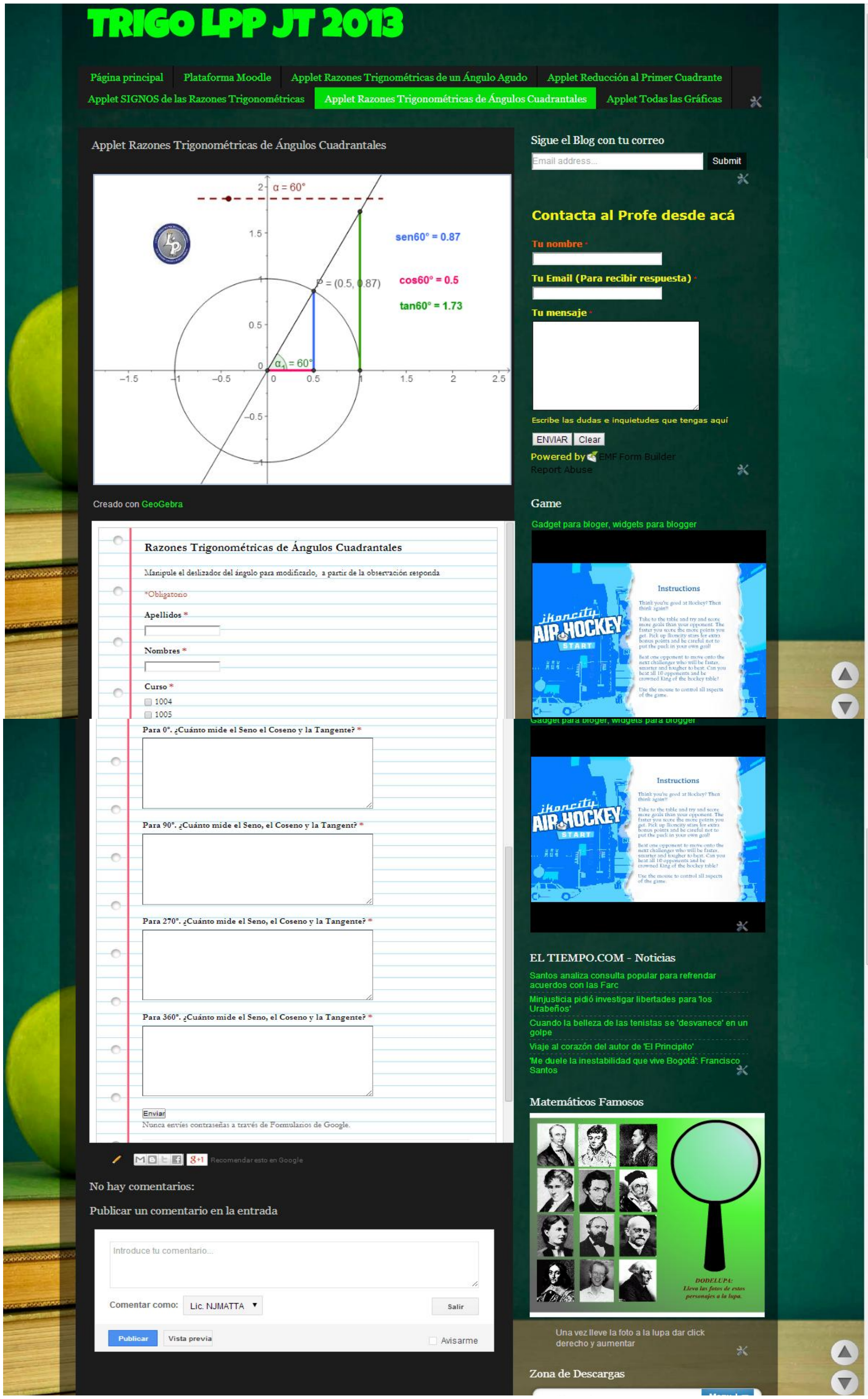


Applet Signos de las Razones Trigonométricas con su Formulario Accesible en: http://trigolppjt2013.blogspot.com/p/applet-signos-de-las-razones.html

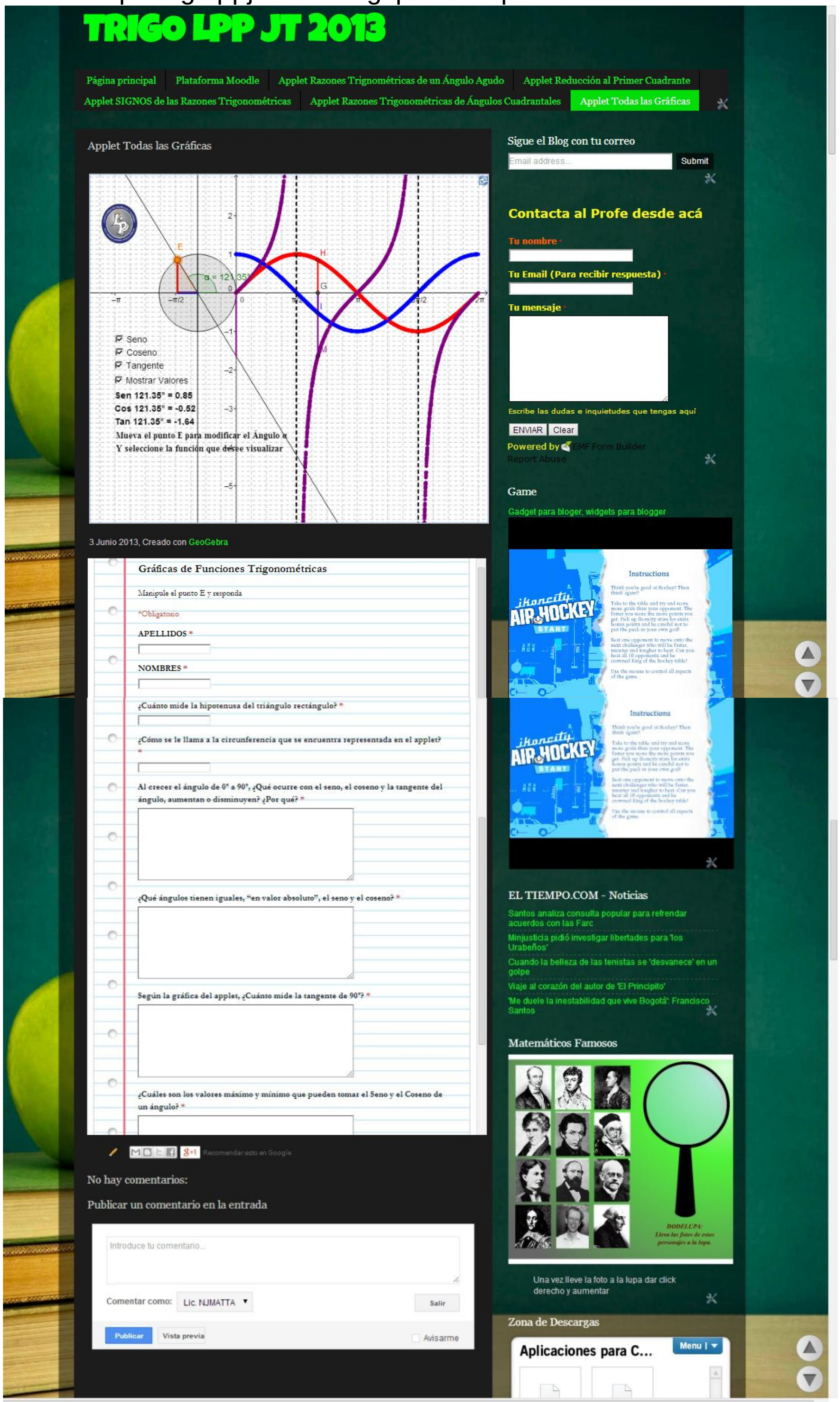
Applet Reducción de Ángulos al primer Cuadrante con su Formulario
Accesible en: http://trigolppjt2013.blogspot.com/p/applet-reduccion-al-primer-cuadrante.html



Applet Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales
Accesible en: http://trigolppjt2013.blogspot.com/p/applets-razones-de-angulos-cuadrantales.html



Applet Gráficas de las Funciones Trigonométricas con su Formulario
Accesible en: http://trigolppjt2013.blogspot.com/p/razones-de.html



C. ANEXO: Encuesta de Satisfacción

ENCUESTA DEL TRABAJO REALIZADO CON GEOGEBRA EN CLASE DE TRIGONOMETRÍA

NOMBRE:____ CURSO:____________

Marque con una X su apreciación al respecto de la información publicada en el Blog de Matemáticas para el aprendizaje de las Razones Trigonométricas

1. ¿La información publicada en cada Aplicativo (Applets) fue lo suficientemente clara para resolver las distintas preguntas?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

2. ¿Las temáticas abordadas en cada Applet corresponden con las temáticas de Trigonometría planteadas por el Docente?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

3. ¿Considera que los Applets son interactivos y permiten visualizar el dinamismo de los objetos geométricos con sus respectivas medidas?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

4. ¿Los Applets permitieron visualizar la variación de los signos de las razones trigonométricas en los cuadrantes del plano cartesiano?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

5. ¿Las representaciones geométricas realizadas por el docente en las clases de matemáticas deben ser realizadas por medio de software para proyectarlas?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

6. ¿Las representaciones geométricas realizadas por el docente en clases de matemáticas deben ser realizadas solo con la ayuda del marcador y el tablero?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

7. ¿Los Applets facilitaron el aprendizaje de los temas abordados?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

8. ¿El docente hizo uso de los Applets para las explicaciones en el aula de clase?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

9. ¿El uso de los Applets en clase de Matemáticas fue un proceso satisfactorio y beneficioso tanto para el docente como para usted?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

10. ¿Le gustaría que en sus clases de matemáticas futuras los docentes se apoyen de herramientas como las usadas (Applets) para favorecer la comprensión de los temas?
____TOTALMENTE DE ACUERDO
____DE ACUERDO
____PARCIALMENTE DE ACUERDO
____EN DESACUERDO
____NO SABE - NO RESPONDE

D . ANEXO: CD con la propuesta y los archivos de los Applets como página web y las respuestas de los formularios

El contenido del CD está disponible en la dirección:

https://www.dropbox.com/sh/q2hzss2emoa0klz/HdlY-NnDYr

BIBLIOGRAFIA

Adamek, T., Penkalski, K., Valentine G. (2005).The History of Trigonometry. History of Mathematics. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Rutgers. New Jersey.

Arenas, F., Becerra M., Morales, F., Urrutia, L., Gómez, P. (s,f). Razones Trigonométricas, una experiencia de aula. Universidad de los Andes. Bogotá, Colombia.

Blythe, T. y Perkins, D. (1999). El marco conceptual de la enseñanza para la comprensión. La enseñanza para la comprensión: guía para el docente. Buenos Aires: Paidós

Boyer, Carl B. (1999). Historia de la Matemática, España, Alianza Editorial

Cantoral, R.(2001). Un estudio a la formación social de analiticidad. Grupo editorial iberoamericana. Matemática Educativa. México

Carranza, M. (2011). Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica GeoGebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira. Trabajo de grado Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales . Universidad Nacional de Colombia. Sede Palmira

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinuschez des élèves du secondaire. For the Learning of Mathematics 16 (2), 19-22

Fiallo, J. y Gutierrez, A. (2006). Unidad de Enseñanza de las Razones Trigonométricas en un Ambiente Cabri para el desarrollo de las Habilidades de Demostración. SEIEM.

Fiallo, Jorge.(2010). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Universidad de Valencia

Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. (2004) Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. MEN.

Kline, M. (1992). El pensamiento Matemático de la antigüedad a nuestros días. Tomo I, II y III. Alianza Editorial. Madrid.

Moise, E. (1986). Geometría Moderna. México: Fondo Educativo Interamericano S.A.

Montiel, G. (2005). Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica. Tesis Doctoral, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en ciencia aplicada y Tecnología avanzada

Moreno, A., (s.f.). Instrumentos matemáticos computacionales. Cinvestav*, México.* Recuperado el 20 de Enero de 2014, de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-81040_archivo1.pdf

Salcedo, G. 2012. Elementos Básicos de la Trigonometría desde el paso de la razón trigonométrica a la función trigonométrica. Trabajo de Grado Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional. Sede Bogotá.

Sánchez, J. Ruiz, Julio. y Palomo R. (s.f.). Uso educativo de los blogs. Recuperado el 27 de Diciembre de 2012 de: http://tecnologiaedu.uma.es/materiales/web20/archivos/cap2_Uso_educ_Blog.pdf

Stone, M. (1999). Enseñanza para la Comprensión. Ed. Paidos. Buenos Aires

Swokowski, E. (1988). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. MexicoD.F:Iberoamericana, S.A.

Turano. C. (2005). Historia de la trigonometría, algunos antecedentes sobre el Campo y una propuesta didáctica para el nivel polimodal. Unsam. Buenos Aires. Argentina. Recuperado el día 19 de enero de 2014, de: http://www.humanidadesdigital.unsam.edu.ar/experimental/material/art.TuranoECEyM8.3.07.pdf

Varela, J., Braña, T., Garcia, A., Rial A., Vásquez, X. (1998). La Estimación de la respuesta de los No sabe/No contesta, en los estudios de intención de voto. Revista Española de Investigaciones Sociológicas. 83: 269-287, Recuperado el 15 de Enero de 2014, de: www.reis.cis.es/REIS/PDF/REIS_083_11.pdf